

# Предвидување на резервите за исплата на штетите при неживотно осигурување

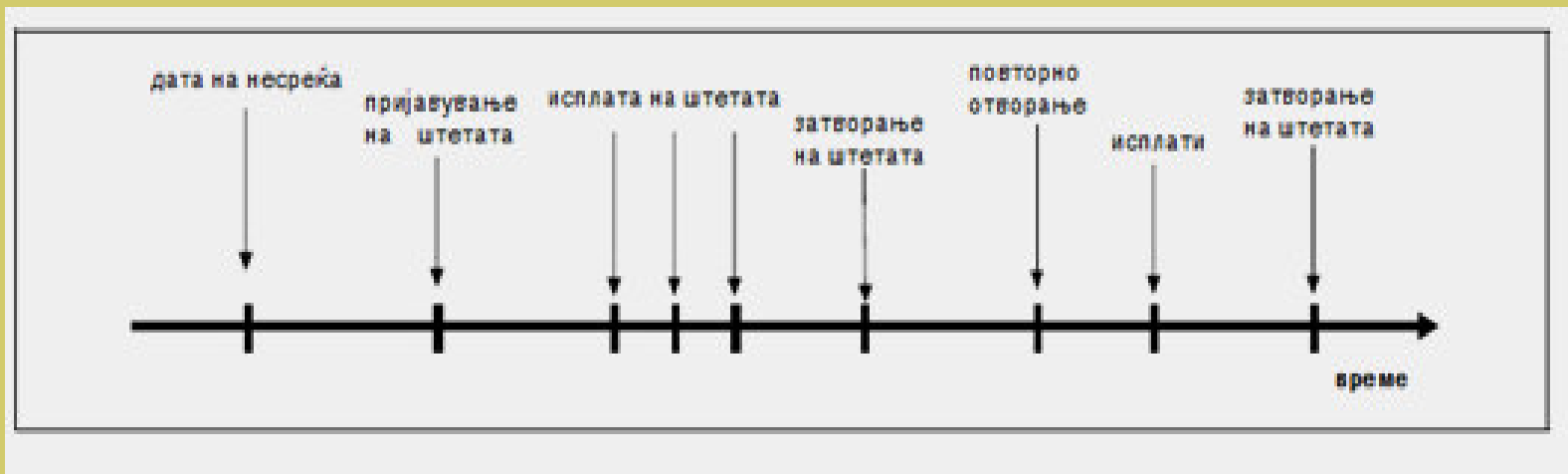
Марко Димовски

# Неживотно осигурување

- **Осигурување на моторни возила** (автоодговорност и каско осигурување)
- **Осигурување на имот** (пожар, провална кражба, разбојништво, кршење стакло, домаќинско осигурување итн)
- **Осигурување од одговорност** (осигурување од одговорноста на директори, менаџери, адвокати и други од штета предизвикана кон трето лице)
- **Осигурување на лица од последици на несреќен случај**
- **Здравствено осигурување**
- **Транспортно осигурување** (осигурување со кое се осигуруваат оние кои пренесуваат стока со камион, авион или брод од штета која би ја направиле врз стоката која ја пренесуваат)
- **Останати осигурувања** (патничко осигурување, осигурување од епидемија итн.)

**Полиса** – договор помеѓу осигурителната компанија и клиентот

**Скаденца** – периодот во кој полисата има важност



**RBNS (Reported But Not Settled)** – резерви за штетите кои се пријавени, но сеуште не се исплатени

**IBNR (Incured But Not Reported)** – резерви за штетите кои се во овој период, но сеуште не се пријавени

**Актуар** – лице кое се занимава со финансиското влијание на ризикот и неизвесноста

Една осигурителна компанија за неживотно осигурување е задолжена секоја година да формира технички резерви за штетите кои не се исплатени, а настанале во претходната календарска година. Актуарот ги користи податоците од минатото, за да го опише развојот на идните плаќања и со тоа да ја оцени сумата од IBNR и RBNS резервите.

$X_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n - i$  - податоци за исплатени или пријавени штети во некумулативен облик. Односно, ова е вкупната вредност на штетите кои се случиле во периодот  $i$ , а биле пријавени  $j$  периоди по настанувањето на штетата

Се претпоставува дека  $n$  периоди по настанувањето на штетата, истата не може да биде пријавена, иако се случила за времетраењето на скаденцата.

$Y_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n - i$  – податоци за исплатени или пријавени штети дадени во кумулативен облик, односно

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^j X_{ik}$$

# Метод на триаголници на развој (Chain ladder method)

Се користат податоците дадени во кумулативен облик кои се анализираат како матрица, при што податоците кои ни се познати се членови на горниот триаголник на матрицата (или трапезоид ако матрицата не е квадратна), додека членовите на долниот триаголник (или трапезоид) ни се непознати и треба да ги одредиме.

**Инцидентна година** – година во која настанала штетата, односно редиците на матрицата од податоци

**Развојна година** – година во која е пријавена штетата, односно колоните на матрицата од податоци

Детерминистичкиот пристап на методот на триаголници на развој претпоставува дека односот меѓу следните вредности е апроксимативно константен независно од периодот  $i$  во кој се случила несреќата, но зависно од периодот  $j$ .

$$Y_{i,j+1} \cong Y_{i,j} \cdot f_j$$

к.ш.  $f_j, j = 0, 1, \dots, n - 1$  се нарекуваат **фактори на развој**

$F_{i,j}, i = 1, \dots, n - 1, j = 0, 1, \dots, n - i - 1$ - **индивидуални фактори на развој**

**Пример1.** Нека имаме 5 години на настанување на штетата, тогаш  $n = 5$  и  $i = 1, 2, \dots, 5$ . За  $i = 1$ , ќе имаме 5 познати развојни години ( $j = 0, 1, \dots, 4$ ), за  $i = 2$ , ќе имаме 4 познати развојни години ( $j = 0, 1, \dots, 3$ ), итн.

Матрицата на соодветниот триаголник на развој во која ќе ги вметнеме и соодветните индивидуални фактори на развој ќе биде од обликот:

$$\begin{array}{l}
 Y_{1,0} \quad F_{1,0} = \frac{Y_{1,1}}{Y_{1,0}} \quad Y_{1,1} \quad F_{1,1} = \frac{Y_{1,2}}{Y_{1,1}} \quad Y_{1,2} \quad F_{1,2} = \frac{Y_{0,3}}{Y_{0,2}} \quad Y_{0,3} \quad F_{1,3} = \frac{Y_{0,4}}{Y_{0,3}} \quad Y_{1,4} \\
 Y_{2,0} \quad F_{2,0} = \frac{Y_{2,1}}{Y_{2,0}} \quad Y_{2,1} \quad F_{2,1} = \frac{Y_{2,2}}{Y_{2,1}} \quad Y_{2,2} \quad F_{2,2} = \frac{Y_{2,3}}{Y_{2,2}} \quad Y_{2,3} \\
 Y_{3,0} \quad F_{3,0} = \frac{Y_{3,1}}{Y_{3,0}} \quad Y_{3,1} \quad F_{3,1} = \frac{Y_{3,2}}{Y_{3,1}} \quad Y_{3,2} \\
 Y_{4,0} \quad F_{4,0} = \frac{Y_{4,1}}{Y_{4,0}} \quad Y_{4,1} \\
 Y_{5,0}
 \end{array}$$



Оценката  $\hat{f}_j$  на факторот на развој  $f_j$  може да се најде како **аритметичка средина на индивидуалните фактори на развој** во една колона, односно

$$\hat{f}_j = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j-1} F_{i,j}$$

за  $j = 0, 1, \dots, n-2$

Почесто користен пристап за наоѓање на оценката  $\hat{f}_j$  на факторот на развој  $f_j$  е преку **тежинската односно пондерираната средина** на податоците од две соседни колони. Односно,

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} Y_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} Y_{i,j}}$$

за  $j = 0, 1, \dots, n-2$

Проектираните исплатени штети во крајната колона од матрицата се наоѓаат како

$$\hat{Y}_{i,n-1} = Y_{i,n-i} \cdot \prod_{j=n-i}^{n-2} \hat{f}_j$$

Сумата од IBNR и RBNS резервите кои што компанијата треба да ги поседува на денот на правење на извештајот, се наоѓаат како

$$\hat{R}_i = \hat{Y}_{i,n-1} - Y_{i,n-i}$$

Да забележиме дека  $\hat{R}_1 = 0$ , бидејќи компанијата не ги исплаќа несреќите кои се пријавени  $n$  или повеќе периоди по настанувањето на штетата, па затоа резервите за овие штети се еднакви на нула.

**Пример2.** Нека ги имаме следниве податоци за исплатени (ликвидирани штети) дадени во некумулативен облик. Ќе ги најдеме резервите кои треба да ги поседува компанијата на денот на правењето на извештајот за да може да ги исплати штетите во иднина.

| година на настан на штетата | година на развој |            |            |            |            |            |            |
|-----------------------------|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                             | 0                | 1          | 2          | 3          | 4          | 5          | 6          |
| 01.01.2005-31.12.2005       | 75.879.232       | 45.623.145 | 42.311.563 | 28.746.500 | 24.345.333 | 19.874.321 | 10.753.256 |
| 01.01.2006-31.12.2006       | 65.983.214       | 47.678.761 | 41.231.235 | 30.956.721 | 25.649.080 | 13.452.321 |            |
| 01.01.2007-31.12.2007       | 54.632.458       | 47.689.342 | 34.233.441 | 20.987.345 | 14.565.322 |            |            |
| 01.01.2008-31.12.2008       | 45.627.811       | 24.343.212 | 19.321.898 | 15.674.356 |            |            |            |
| 01.01.2009-31.12.2009       | 52.458.811       | 37.856.432 | 20.090.761 |            |            |            |            |
| 01.01.2010-31.12.2010       | 47.893.421       | 24.564.221 |            |            |            |            |            |
| 01.01.2011-31.12.2011       | 34.523.564       |            |            |            |            |            |            |

Ако податоците ги префрлиме во кумулативен облик, ја добиваме следната табела:

| година на настан на штетата | година на развој |             |             |             |             |             |             |
|-----------------------------|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                             | 0                | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           |
| 01.01.2005-31.12.2005       | 75.879.232       | 121.502.377 | 163.813.940 | 192.560.440 | 216.905.773 | 236.780.094 | 247.533.350 |
| 01.01.2006-31.12.2006       | 65.983.214       | 113.661.975 | 154.893.210 | 185.849.931 | 211.499.011 | 224.951.332 |             |
| 01.01.2007-31.12.2007       | 54.632.458       | 102.321.800 | 136.555.241 | 157.542.586 | 172.107.908 |             |             |
| 01.01.2008-31.12.2008       | 45.627.811       | 69.971.023  | 89.292.921  | 104.967.277 |             |             |             |
| 01.01.2009-31.12.2009       | 52.458.811       | 90.315.243  | 110.406.004 |             |             |             |             |
| 01.01.2010-31.12.2010       | 47.893.421       | 72.457.642  |             |             |             |             |             |
| 01.01.2011-31.12.2011       | 34.523.564       |             |             |             |             |             |             |

$$\hat{f}_0 = \frac{121.502.377 + 113.661.975 + 102.321.800 + 69.971.023 + 90.315.243 + 72.457.642}{75.879.232 + 65.983.214 + 54.632.458 + 45.627.811 + 52.458.811 + 47.893.421}$$

$$\hat{f}_0 = \frac{570.230.060}{342.474.947} = 1.665027077$$

На сличен начин се добиваат и останатите фактори на развој, односно

$$\hat{f}_1 = 1,315784 \quad \hat{f}_2 = 1,17696076 \quad \hat{f}_3 = 1,120457839$$
$$\hat{f}_4 = 1,077792413 \quad \hat{f}_5 = 1,045414527$$

Ќе го дополниме долниот триаголник на табелата со кумулативни износи, со користење на оценките на факторите на развој добиени преку пондерираната средина на познатите податоци од две соседни познати колони, а потоа табелата ќе ја решиме и со аритметичка средина на индивидуалните фактори на развој.

Во развојната година 1 од последната редица имаме:

$$34.523.564 \cdot \hat{f}_0 = 34.523.564 \cdot 1,665027077 = 57.482.669$$

Во развојната година 2 од последната редица имаме:

$$34.523.564 \cdot \hat{f}_0 \cdot \hat{f}_1 = 57.482.669 \cdot \hat{f}_1 = 75.634.814$$

Во развојната година 3 од последната редица имаме:

$$34.523.564 \cdot \hat{f}_0 \cdot \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2 = 75.634.814 \cdot \hat{f}_2 = 89.019.209$$

ИТН.

| година на настан на штетата | година на развој |             |             |             |             |             |             |
|-----------------------------|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                             | 0                | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           |
| 01.01.2005-31.12.2005       | 75.879.232       | 121.502.377 | 163.813.940 | 192.560.440 | 216.905.773 | 236.780.094 | 247.533.350 |
| 01.01.2006-31.12.2006       | 65.983.214       | 113.661.975 | 154.893.210 | 185.849.931 | 211.499.011 | 224.951.332 | 235.167.390 |
| 01.01.2007-31.12.2007       | 54.632.458       | 102.321.800 | 136.555.241 | 157.542.586 | 172.107.908 | 185.496.598 | 193.920.838 |
| 01.01.2008-31.12.2008       | 45.627.811       | 69.971.023  | 89.292.921  | 104.967.277 | 117.611.408 | 126.760.684 | 132.517.460 |
| 01.01.2009-31.12.2009       | 52.458.811       | 90.315.243  | 110.406.004 | 129.943.534 | 145.596.252 | 156.922.536 | 164.049.098 |
| 01.01.2010-31.12.2010       | 47.893.421       | 72.457.642  | 95.338.654  | 112.209.855 | 125.726.412 | 135.506.973 | 141.660.958 |
| 01.01.2011-31.12.2011       | 34.523.564       | 57.482.669  | 75.634.814  | 89.019.209  | 99.742.270  | 107.501.462 | 112.383.590 |

$$\widehat{R}_2 = 235.167.390 - 224.951.332 = 10.216.058$$

$$\widehat{R}_3 = 193.920.838 - 172.107.908 = 21.812.930$$

Слично се добива дека

$$\widehat{R}_4 = 27.550.183 \quad \widehat{R}_5 = 53.643.094 \quad \widehat{R}_6 = 69.203.316 \quad \widehat{R}_7 = 77.860.026$$

Вкупните резерви (IBNR+RBNS) кои треба да ги поседуваме на 31.12.2011 се

$$\widehat{R} = \widehat{R}_1 + \widehat{R}_2 + \widehat{R}_3 + \widehat{R}_4 = 260.285.608$$

Оценката на факторите на развој може да се најде со аритметичка средина на индивидуалните фактори на развој

$$F_{1,0} = \frac{121.502.377}{75.879.232} = 1,6012600 \quad F_{2,0} = \frac{113.661.975}{65.983.214} = 1,7225892 \quad F_{3,0} = \frac{102.321.800}{54.632.458} = 1,8729123$$

$$F_{4,0} = \frac{69.971.023}{45.627.811} = 1,5335170 \quad F_{5,0} = \frac{90.315.243}{52.458.811} = 1,7216411 \quad F_{6,0} = \frac{72.457.642}{47.893.421} = 1,5128934$$

$$\bar{f}_0 = \frac{1,6012600 + 1,7225892 + 1,8729123 + 1,5335170 + 1,7216411 + 1,5335170}{6}$$

$$\bar{f}_0 = 1,6608022$$

Слично,

$$\hat{f}_1 = 1,3088298 \quad \hat{f}_2 = 1,176142741 \quad \hat{f}_3 = 1,118964144$$

$$\hat{f}_4 = 1,077615586 \quad \hat{f}_5 = 1,0454145$$

| година на настан на штетата | година на развој |             |             |             |             |             |             |
|-----------------------------|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                             | 0                | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           |
| 01.01.2005-31.12.2005       | 75.879.232       | 121.502.377 | 163.813.940 | 192.560.440 | 216.905.773 | 236.780.094 | 247.533.350 |
| 01.01.2006-31.12.2006       | 65.983.214       | 113.661.975 | 154.893.210 | 185.849.931 | 211.499.011 | 224.951.332 | 235.167.390 |
| 01.01.2007-31.12.2007       | 54.632.458       | 102.321.800 | 136.555.241 | 157.542.586 | 172.107.908 | 185.466.164 | 193.889.022 |
| 01.01.2008-31.12.2008       | 45.627.811       | 69.971.023  | 89.292.921  | 104.967.277 | 117.454.619 | 126.570.928 | 132.319.087 |
| 01.01.2009-31.12.2009       | 52.458.811       | 90.315.243  | 110.406.004 | 129.853.220 | 145.301.097 | 156.578.727 | 163.689.676 |
| 01.01.2010-31.12.2010       | 47.893.421       | 72.457.642  | 94.834.721  | 111.539.169 | 124.808.330 | 134.495.402 | 140.603.447 |
| 01.01.2011-31.12.2011       | 34.523.564       | 57.336.810  | 75.044.125  | 88.262.603  | 98.762.688  | 106.428.212 | 111.261.598 |

Вкупните резерви (RBNS+IBNR) на 31.12.2011 се 257.516.494



## Стохастички пристап на методот на триаолници на развој

Thomas Mask покажал дека Еткинсоновите оценувачи

$$\hat{f}_j = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j-1} F_{i,j} \text{ за } j = 0, 1, \dots, n-2$$

се непристрасни и неколинеарни оценувачи за  $f_j$ , под следните три претпоставки:

- 1)  $E(Y_{i,j+1} | Y_{i,0}, \dots, Y_{i,j-1}) = f_j \cdot Y_{i,j}$  за  $i = 1, \dots, n$   $j = 0, \dots, n-1$
- 2)  $cov(Y_{i_1,j}, Y_{i_2,j}) = 0$  за  $i_1 \neq i_2$
- 3)  $D(Y_{i,j+1} | Y_{i,0}, \dots, Y_{i,j-1}) = Y_{i,j} \cdot \sigma_j^2$  за  $i = 1, \dots, n$   $j = 0, \dots, n-1$   
каде што  $\sigma_j^2$  се непознати параметри

За секој развоен период имаме

$$Y_{i,j+1} = Y_{i,j} \cdot f_j + \epsilon_j \text{ за } i = 1, \dots, n$$

при што за секое  $\epsilon_j$  важи дека  $E(\epsilon_j | Y_i(j)) = 0$  и  $D(\epsilon_j | Y_i(j)) = Y_{i,j} \cdot \sigma_j^2$