



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет
Институт за математика

МАТЕМАТИЧКА ЗАДНИНА ВО УПРАВУВАЊЕ СО ПРОЕКТ: PERT/CPM МЕТОД ЗА АНАЛИЗА НА ВРЕМЕ И ВРЕМЕ-ТРОШОК НА АКТИВНОСТИ

ШЕСТИ СЕМИНАР „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНИ“
17 МАРТ 2023

Стефан Мирчевски¹

Гордана Николовска²

¹Природно-математички факултет, Скопје

²СУГС „Георги Димитров“, Скопје

Видови проекти зад кои стои математички апарат

- Изградба на нова фабрика
 - Истражување и развој на нов производ
 - Филмски продукции
 - Инсталирање на информациски системи
- и уште многу други

Како се контролираат активностите при управување со проект?

- PERT (Program Evaluation and Review Technique) метод
- CPM (Critical Path Method) метод

Двата метода заедно овозможуваат да се контролира извршувањето на одредена активност во проектот, врз основа на следниве важни параметри:

- Прегледност на активностите со прикажување во **мрежен дијаграм**
- Критичен пат
- Најрано/најкасно време на започнување/завршување на активноста

Опис на задачата: Reliable Construction Co. Project (RCCP)

- Изградба на нова фабрика со буџет од 5,4 милиони парични единици во рок од една година.
- Договор за градба:
 - 1) Ако компанијата не ја заврши изградбата за 47 недели од сега, треба да плати пенали од 300000 парични единици.
 - 2) За поттик во работата, производителот доделува бонус од 150000 парични единици, ако компанијата ја заврши изградбата за 40 недели.

Листа со активности за РССР задачата

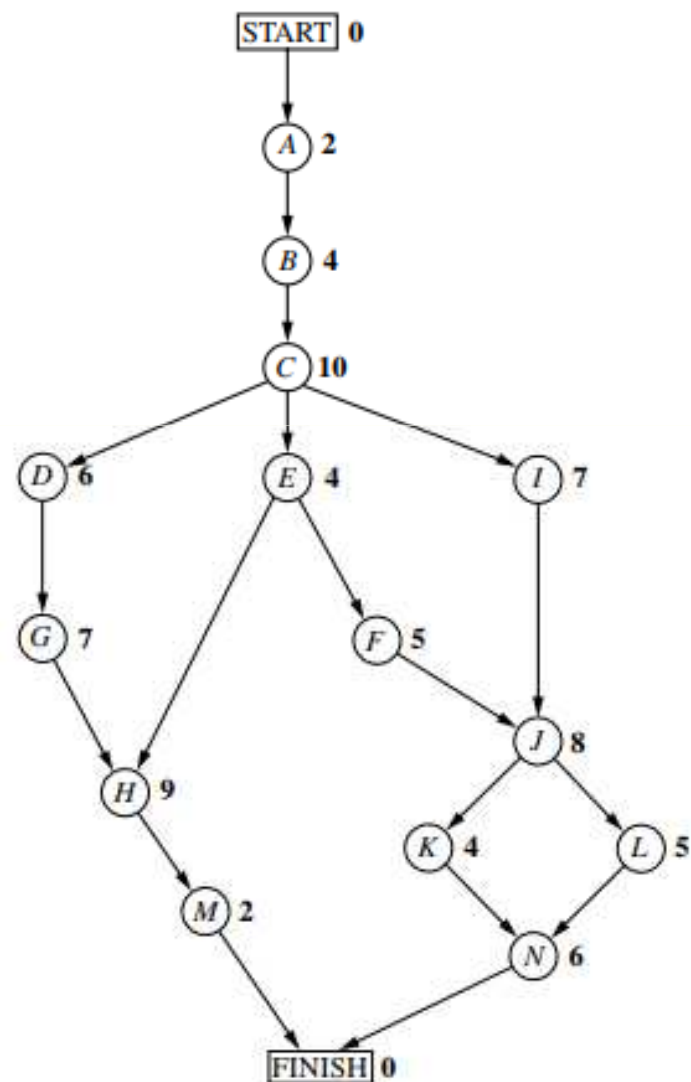
Активност	Опис	Претходник	Проценка (недели)
A	Ископ	Нема	2
B	Темел	A	4
C	Сид	B	10
D	Покрив	C	6
E	Водовод (надвор.)	C	4
F	Водовод (внатре.)	E	5
G	Изолација	D	7
H	Фасада	E, G	9
I	Електрични зафати	C	7

J	Сидна табла	F, I	8
K	Осветлување	J	4
L	Бојадисување	J	5
M	Корекции (надвор.)	H	2
N	Корекции (внатре.)	K, L	6

Мрежен дијаграм за РССР задачата

- Активност-теме (activity-on-node) начин на прикажување на активностите во мрежата
- Збир на сите проценети времетраења на активностите

79 недели



Критичен пат во RССP задачата

- Времетраењето на проектот **не е помало** од должината на патот
- Времетраењето на проектот **е поголемо** од патот кој содржи активности со повеќе од еден претходник
- Процентото времетраење на проектот е еднакво на најдолгиот пат во мрежата познат како **критичен пат**

Пат	Должина
S-A-B-C-D-G-H-M-F	40
S-A-B-C-E-H-M-F	31
S-A-B-C-E-F-J-K-N-F	43
S-A-B-C-E-F-J-L-N-F	44
S-A-B-C-I-J-K-N-F	41
S-A-B-C-I-J-L-N-F	42

Најрано време на започнување и завршување на активноста во РССР задачата

- Кога треба најрано да започнат/завршат активностите за да нема одложување?

- Да нема одложување значи:

- 1) Вистинското време да биде еднакво со проценетото време на секоја активност.
- 2) Секоја активност започнување веднаш штом завршат сите нејзини претходници.

- Најрано време на започнување (со еден претходник)

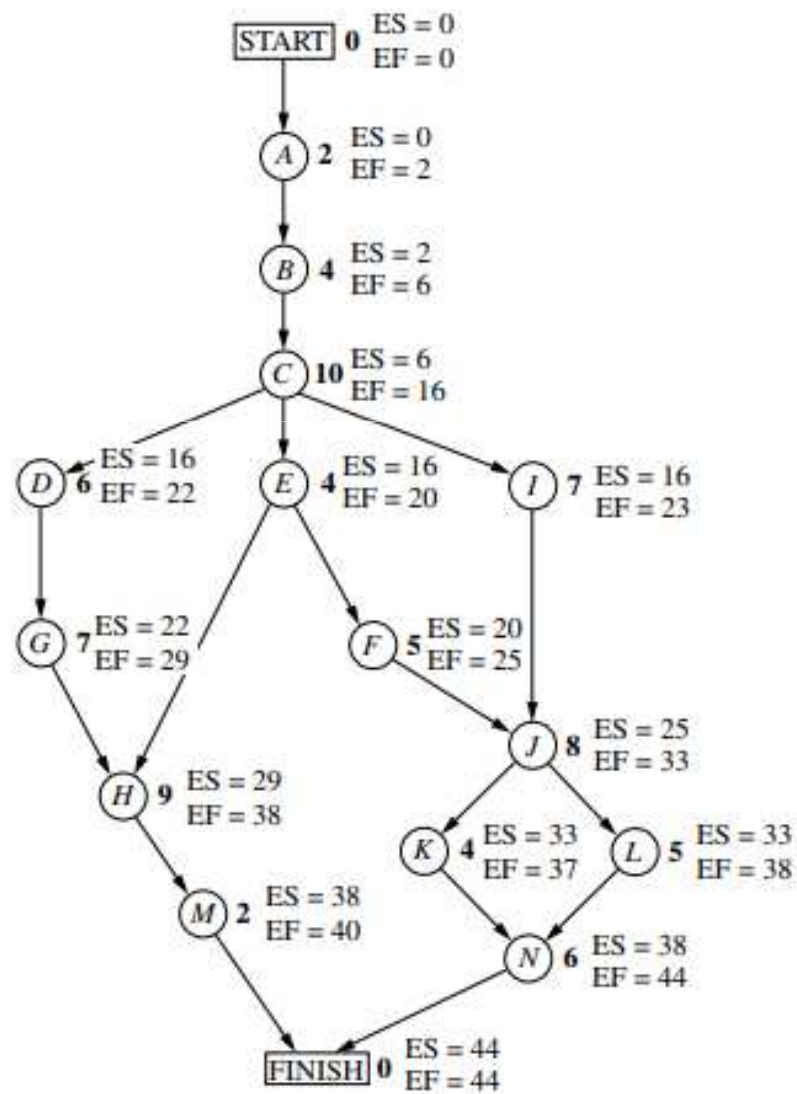
$$ES = EF \text{ на нејзиниот претходник}$$

- Најрано време на започнување (со повеќе претходници)

$$ES = \text{поголемото } EF \text{ од претходниците}$$

- Најрано време на завршување

$$EF = ES + \text{проценето времетраење на активноста}$$



Најкасно време на започнување и завршување на активноста во РССР задачата

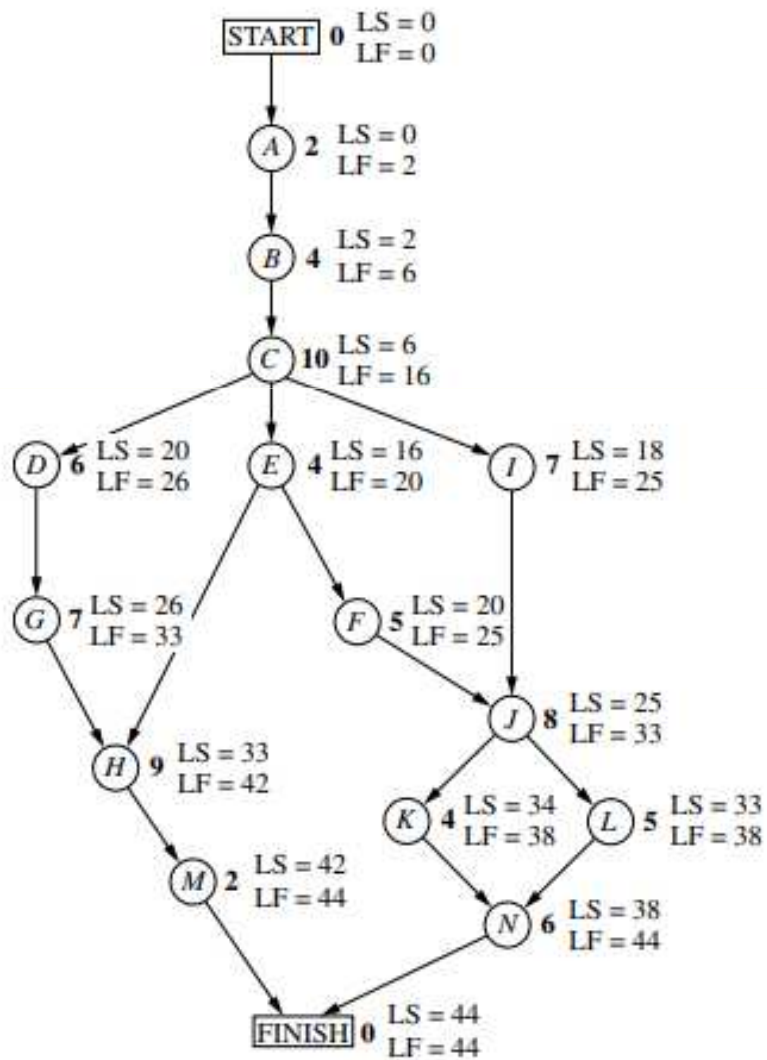
- Најкасно време на започнување на активноста е последното можно време за почеток без да дојде до одложување на времетраењето на проектот

- Најкасно време на започнување

$LS = LF -$ проценето времетраење на активноста

- Најкасно време на завршување

$LF =$ помалото LS на следбениците

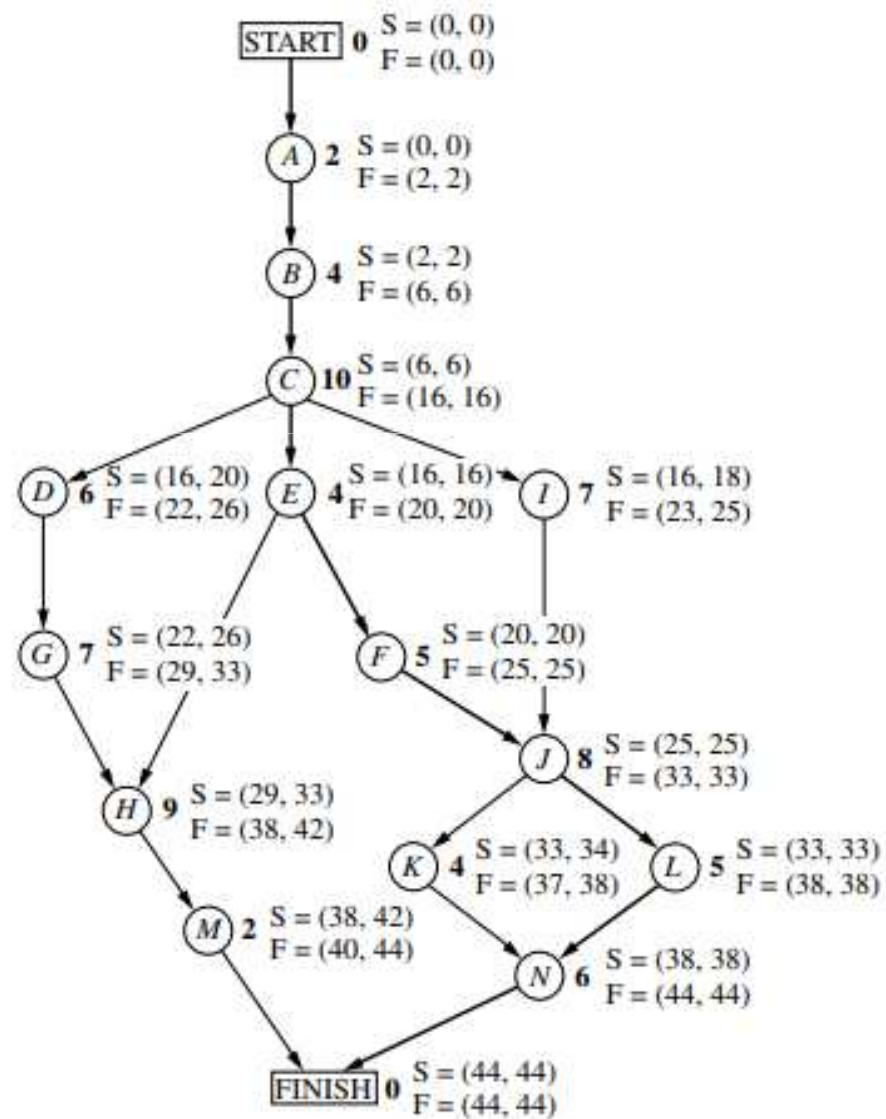


Израмнување во распоредот со активности

- Добиените дијаграми за најрано и најкасно започнување/завршување на активностите во RCCP задачата укажуваат на неправилности.
- Активностите во дијаграмот за LS/LF завршуваат **подоцна** од активностите во дијаграмот за ES/EF.
- Израмнување на активности
- Израмнување во распоредот (временска резерва) = $LF - EF = LS - ES$
- Пример за темето M

	E	L
S	38	42
F	40	44

Израмнувањето е **4 недели**, што значи дека M може да се одложи по EF без да се промени комплетирањето на целиот проект (44 недели).



Врска меѓу критичниот пат и израмнувањето во распоредот

- Израмнувањето е потврда за најдениот критичен пат.
- Вредноста 0 значи дека темето е на критичниот пат и дека со одложување на активността, ќе се одложи и завршувањето на целиот проект.

Активност	Израмнување	Критичен пат
A	0	Да
B	0	Да
C	0	Да
D	4	Не
E	0	Да
F	0	Да
G	4	Не
H	4	Не
I	2	Не
J	0	Да
K	1	Не
L	0	Да
M	4	Не
N	0	Да

Анализа на односот време-трошок

- Клучно прашање: Ако се потрошат дополнителни средства, кој е најевтиниот начин на обид да се исполни времето за завршување на проектот од 40 недели?
- Одговор: Нарушување (crashing) на активност (проект) со преземање на дополнителни мерки:
 - Прекувремена работа
 - Дополнителна привремена помош
 - Специјална опрема, итн.
- CPM методот контролира до каде може да се наруши одредена активност со цел да се намали времето потребно за завршување на проектот.

Нарушување на активности во РССР задачата

На пример, за активноста J ако се применат мерките

дополнителна работна сила и прекувремена работа

со PERT методот за ревизија и проценка, менаџментот ги проценува следниве промени во активноста:

- Нормално време: 8 недели со трошок од 430000 п.е.
- Нарушено време: 6 недели со трошок од 490000 п.е.
- Максимално редуцирање на времето: 2 недели
- Заштеден нарушен трошок (неделно): 30000 п.е.

Активност	Време (недели)		Трошок		Мах. ред. време	Заштеден трошок
	Нормално	Нарушено	Нормален	Нарушен		
A	2	1	180000	280000	1	100000
B	4	2	320000	420000	2	50000
C	10	7	620000	860000	3	80000
D	6	4	260000	340000	2	40000
E	4	3	410000	570000	1	160000
F	5	3	180000	260000	2	40000
G	7	4	900000	1020000	3	40000
H	9	6	200000	380000	3	60000
I	7	5	210000	270000	2	30000
J	8	6	430000	490000	2	30000
K	4	3	160000	200000	1	40000
L	5	3	250000	350000	2	50000
M	2	1	100000	200000	1	100000
N	6	3	330000	510000	3	60000

Која активност може да биде нарушена?

- Еден начин за целосно (делумно) нарушување на активност е со **анализа на маргинални трошоци**.
- За таа цел потребна е последната колона од претходната табела со проценети вредности и сите патишта низ мрежниот дијаграм во РСРP задачата.

Активност за нарушување	Нарушен трошок	Должина на пат					
		ABCDGHM	ABCEHM	ABCEFJKN	ABCEFJLN	ABCIJKN	ABCIJLN
		40	31	43	44	41	42
J	30000	40	31	42	43	40	41
J	30000	40	31	41	42	39	40
F	40000	40	31	40	41	39	40
F	40000	40	31	39	40	39	40

- J и F се целосно нарушени активности и постојат три патишта за да се постигне времетраењето од 40 недели.

Некои важни заклучоци

- Производителот треба да подари бонус од 140000 парични единици за реализација на времетраење на проектот од 40 недели.
- Тоа е најевтината варијанта за постигнување на целта во однос на понудениот бонус од 150000 .
- Методот за нарушување на активности, земајќи ги предвид сите должини на патиштата во мрежниот дијаграм не е практичен за големи мрежи.

ЛИНЕАРНО
ПРОГРАМИРАЊЕ

Задача на линеарно програмирање за избор на активност за нарушување

- Целта е да се минимизира вкупниот трошок од нарушување на активностите.
- Одлучувачки променливи
 x_j : редуцирање на времетраењето на активноста j , $j = A, \dots, N$ поради нарушување
- Ограничување е времетраењето на проектот кое треба да биде најмногу колку времето посакувано од производителот (менаџерот).
- Помошни променливи
 y_j : почетно време на активноста j , $j = B, \dots, N$ во однос на x_A, \dots, x_N
 y_{FINSH} : времетраење на проектот, т.е. време во кое е достигнато темето FINISH (КРАЈ)
- Функција на цел
$$Z = 100x_A + 50x_B + \dots + 60x_N$$

-
-
- Ограничувања (за еден претходник)

почетното време на активността

\geq

почетното време + времетраењето на претходникот

На пример за теме F (со претходник E)

Времетраење на E = $4 - x_E$

Тогаш

$$y_F \geq y_E + 4 - x_E$$

-
-
- Ограничувања (за два претходника)

На пример за темето J (претходници се F и I)

Времетраење на F = $5 - x_F$

Тогаш

$$y_J \geq y_F + 5 - x_F$$

Времетраење на I = $7 - x_I$

Тогаш

$$y_J \geq y_I + 7 - x_I$$

$$\min Z = 100x_A + 50x_B + \dots + 60x_N$$

$$y_B \geq y_A + 2 - x_A$$

$$y_C \geq y_B + 4 - x_B$$

$$y_D \geq y_C + 10 - x_C$$

$$y_E \geq y_C + 10 - x_C$$

$$y_F \geq y_E + 4 - x_E$$

$$y_G \geq y_D + 6 - x_D$$

$$y_I \geq y_C + 10 - x_C$$

$$y_K \geq y_J + 7 - x_J$$

$$y_L \geq y_J + 7 - x_J$$

$$y_M \geq y_H + 9 - x_H$$

$$y_H \geq y_G + 7 - x_G$$

$$y_H \geq y_E + 4 - x_E$$

$$y_J \geq y_F + 5 - x_F$$

$$y_J \geq y_I + 7 - x_I$$

$$y_N \geq y_K + 4 - x_K$$

$$y_N \geq y_L + 5 - x_L$$

$$y_{FINISH} \geq y_M + 2 - x_M$$

$$y_{FINISH} \geq y_N + 6 - x_N$$

$$x_A \leq 1, x_B \leq 2, \dots, x_N \leq 3$$

$$x_A \geq 0, x_B \geq 0, \dots, x_N \geq 0$$

$$y_B \geq 0, y_C \geq 0, \dots, y_N \geq 0$$

$$0 \leq y_{FINISH} \leq 40$$

ВИ БЛАГОДАРАМ НА
ВНИМАНИЕТО

