# ИГРАТА НИМ - ОСНОВА ЗА СТРАТЕШКО РАЗМИСЛУВАЊЕ

Ана Плетварец, Институт за математика, Природно-математички факултет
Марија Мирчевска, Факултет за информатички науки и компјутерско инженерство

Шести семинар „Математика и примени“, 17 март 2023
Институт за математика, Природно-математички факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје

# Теорија на игри

## Комбинаторни игри

### Непристрасни игри

# Играта Ним

## Правила

## Други варијанти

- „мизерна“ Ним игра
- Ним игра со одземање
- Кајлс
- Циркуларна Ним игра
- Индекс k - Ним игра
- Игра на Гранди
- Небалансирана игра

**Операцијата Ним-збир**
**XOR (исклучна дисјункција)**

$$3 \oplus 5 = 6$$

1. Претворање на броевите од декаден во бинарен броен систем

$$3_{10} = 11_2 \qquad 5_{10} = 101_2$$

2. Пресметување на нивниот Ним-збир

$$\begin{array}{cr} \oplus & 011 \\ & 101 \\ \hline & 110 \end{array}$$

3. Претворање на добиениот збир од бинарен во декаден броен систем

$$110_2 = 6_{10}$$

За секои ненегативни цели броеви $x, y, z$ важи:

**комутативност** $x \oplus y = y \oplus x$

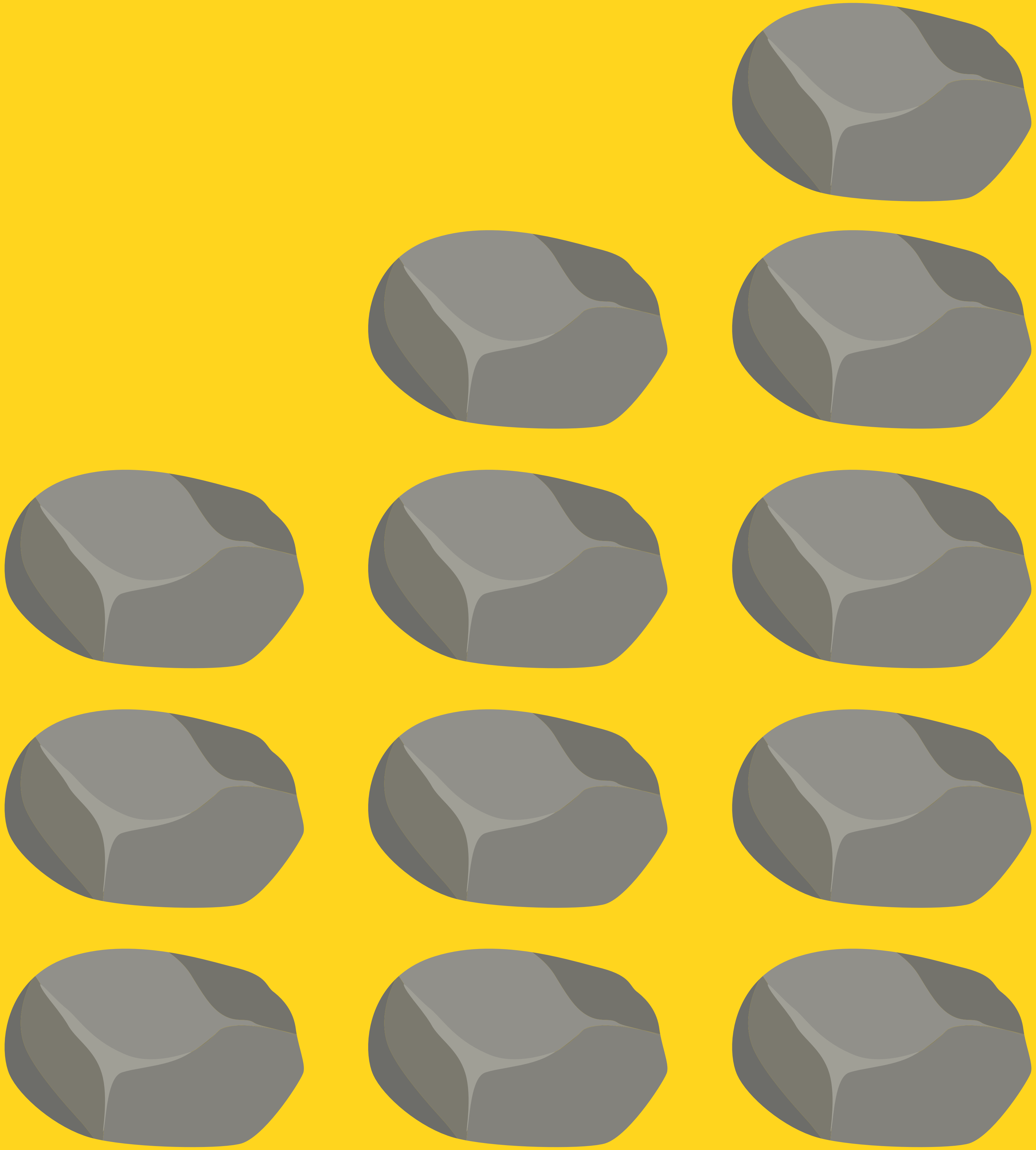
**асоцијативност** $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

**неутрален елемент** $(\exists 0 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N}) \quad 0 \oplus x = x$

**инверезен елемент** $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists x^{-1} \in \mathbb{N}) \quad x \oplus x = 0$

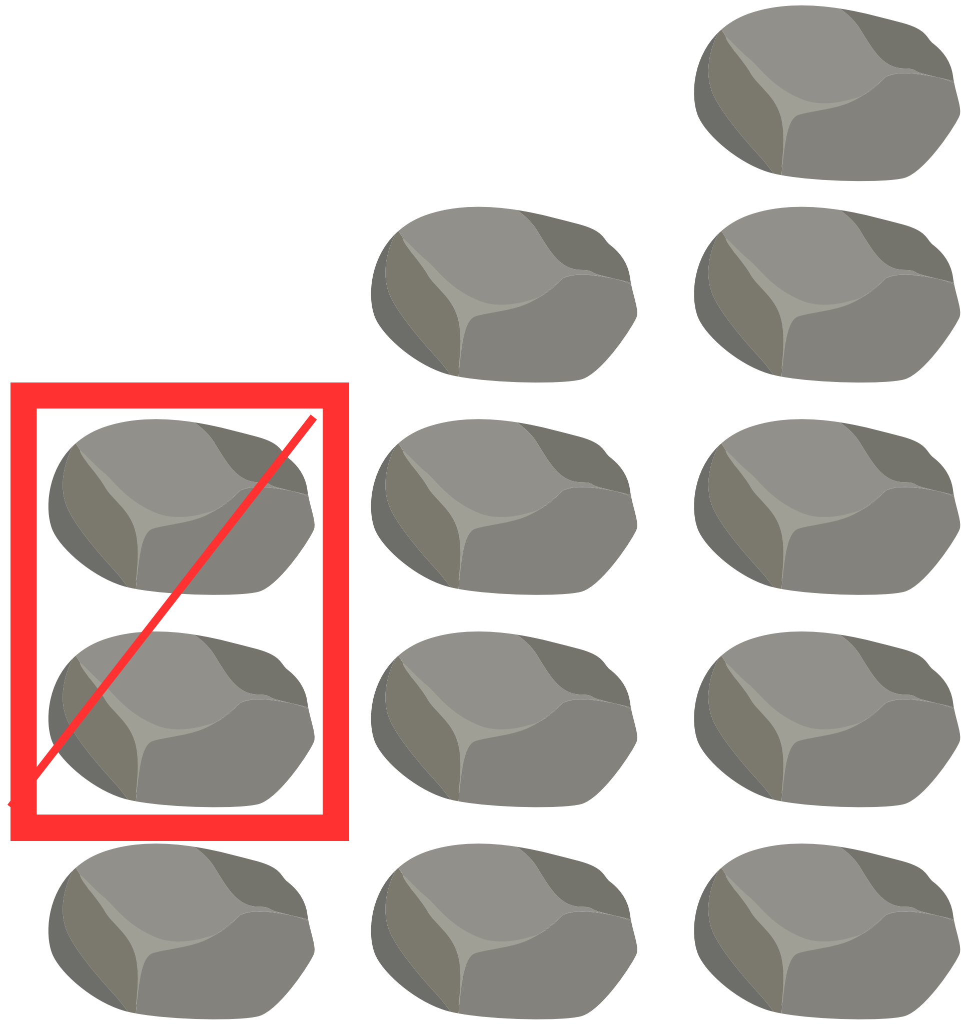
# Како да победиме?

Нека големините на различните купови ги означиме со $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Играчот кој е на потег победува ако $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$, т.е. победенички потег може да се добие на следниот начин: Најпрво определуваме куп $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и број $b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, a_i - 1\}$ таков што $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_{i-1} \oplus b_i \oplus a_{i+1} \oplus a_{i+2} \oplus \ldots \oplus a_n = 0$ и земаме онолку камења од купот $i$ така да $b_i$ камења останат. Ако $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$ тогаш играчот кој е на потег губи.



| Куп 1 | Куп 2 | Куп 3 | Потег |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | Почетна позиција |
| 1 | 4 | 5 | 1. Ивана зема 2 камења од куп 1. |
| 1 | 4 | 3 | 2. Марко зема 2 камења од куп 3. |
| 1 | 2 | 3 | 3. Ивана зема 2 камења од куп 2. |
| 0 | 2 | 3 | 4. Марко зема 1 камен од куп 1. |
| 0 | 2 | 2 | 5. Ивана зема 1 камен од куп 3. |
| 0 | 1 | 2 | 6. Марко зема 1 камен од куп 2. |
| 0 | 1 | 1 | 7. Ивана зема 1 камен од куп 3. |
| 0 | 1 | 0 | 8. Марко зема 1 камен од куп 3. |
| 0 | 0 | 0 | 9. Ивана зема 1 камен од куп 2. |

На пример, во погоре наведената игра со купови од по 3, 4 и 5 камења соодветно, забележуваме дека $3 \oplus 4 \oplus 5 = 7 \oplus 5 = 2$ и $1 \oplus 4 \oplus 5 = 5 \oplus 5 = 0$, па играчот кој е на потег (во случајот Ивана) победува со сведување на првиот куп од 3 камења, на 1 камен. Потоа $1 \oplus 4 \oplus 5 = 0$, па сега практично играчот кој е на потег ќе изгуби, се додека неговиот противник игра совршена игра.



# Теорема

**Играчот кој е на потег победува во нормална Ним игра ако и само ако ним-збирот на куповите не е нула.**

Доказот не се остава за вежба на читателот. :)

=>

# Доказ

Ако сите големини на куповите се еднакви на нула, тогаш и ним-збирот е нула и играчот на потег ќе изгуби.

Нека барем еден од куповите има големина различна од нула.

Да претпоствиме дека големините на куповите се $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (уште наречени и **нимбери**) пред потегот и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ после потегот.

Нека е направен потег на $k$ -тиот куп, тогаш за сите $i \neq k$ , $a_i = b_i$ .

Нека $s = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$ и $t = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$, па имаме:

$$\begin{aligned}
t &= 0 \oplus t \\
&= (s \oplus s) \oplus t \\
&= s \oplus (s \oplus t) \\
&= s \oplus ((a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n) \oplus (b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n)) \\
&= s \oplus ((a_1 \oplus b_1) \oplus (a_2 \oplus b_2) \oplus \ldots \oplus (a_n \oplus b_n)) \\
&= s \oplus (0 \oplus 0 \oplus \ldots \oplus ((a_k \oplus b_k) \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0) \\
&= s \oplus (a_k \oplus b_k)
\end{aligned}$$

Сега разгледуваме два можни резултати: кога $s = 0$ и кога $s \neq 0$.

**Резултат 1:** Ако $s = 0$, тогаш $t \neq 0$. Ако ним-збирот на првичните големини на куповите е еднаков на нула, тогаш играчот кој е на потег губи.

Ние тврдиме дека $a_k \oplus b_k \neq 0$.

Да претпоставиме спротивно т.е. дека $a_k \oplus b_k = 0$, тогаш

$$
\begin{aligned}
a_k &= a_k \oplus 0 \\
&= a_k \oplus (a_k \oplus b_k) \\
&= (a_k \oplus a_k) \oplus b_k \\
&= b_k
\end{aligned}
$$

Добиваме $a_k = b_k$ . Но, ова е контрадикција со фактот дека играчот кој е на потег земал камења од купот $k$ , бидејќи со таков потег големината пред и после потегот ќе биде различна.

Од тие причини и од $a_k \oplus b_k \neq 0$ , имаме:

$$
\begin{aligned}
t &= s \oplus (a_k \oplus b_k) \\
&= 0 \oplus (a_k \oplus b_k) \\
&= a_k \oplus b_k \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

**Резултат 2:** Ако $s \neq 0$, возможно е да направиме $t = 0$. Ако ним-збирот на првичните големини на куповите не е нула, тогаш играчот кој е на потег победува (може да го направи ним-збирот нула).

Да го земеме предвид степенот на 2 со најголем експонент, $2^k$ кој не е поголем од $s$. Мора да има барем еден $a_i$ таков што содржи $2^k$, во спротивно $2^k$ не може да се појави во $s$.

Сега, земаме $b_i = s \oplus a_i$. Вредноста на $b_i$ се намалува за $2^k$, и се зголемува за најмногу $2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2^0 = 2^k - 1$ (секој преостанат степен на 2ките во s се додава на вредноста, на пример

$s = 2^2 + 2^1 + 2^0$ и $a_i = 2^3 + 2^2$, тоа ни дава $b_i = 2^3 + 2^1 + 2^0$), па $b_i < a_i$.

Уште повеќе,

$$
\begin{aligned}
t &= s \oplus (a_i \oplus b_i) \\
&= s \oplus (a_i \oplus (s \oplus b_i)) \\
&= (s \oplus s) \oplus (a_i \oplus a_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Со ова теоремата е докажана.

# Теорема на Спраг - Гранди

Секоја позиција на непристрасна игра е еквивалентна на куп-Ним со одредена големина.

IMPORTANT

# Ви благодариме за вниманието!