# - Трансцедентна динамика -

## Партиција на множеството за брзо бегство кај трансцедентните цели функции

*Анастасија Трајанова*
ПМФ, Универзитет во Нови Сад

Шести семинар „Математика и примени“, 17 март 2023
Институт за математика, Природно-математички факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје

# Вовед

**Дефиниција.** За функцијата $f : D \to \mathbb{C}$ каде $D$ е отворено подмножество од $\mathbb{C}$, велиме дека е *аналитичка* ако е диференцијабилна и нејзиниот извод е непрекината функција над $D$.

**Дефиниција.** Функциите кои се аналитички на целата комплексна рамнина се нарекуваат цели *цели функции*.

**Забелешка.** Целите функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ кои не се полином ги нарекуваме *трансцедентни цели функции* (*ТЦФ*). Најпознати во оваа класа се:

1. експоненцијалната фамилија функции: $\{f : f(z) = \lambda e^z, \lambda \neq 0\}$
2. косинусната фамилија функции: $\{f : f(z) = cos(\alpha z + \beta), \alpha \neq 0\}$

# Итерации од $f$

**Дефиниција.** За секое $n \in \mathbb{N}$, со $f^n$ ќе ја означуваме $n$-тата итерација од $f$, односно $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ times}}$.

**Дефиниција.** Са секое $z \in \mathbb{C}$, множеството $\{f^n(z)\}_{n \geq 0} = \{z, f(z), f^2(z), f^3(z) \dots\}$ се нарекува *орбита* во $z$.

**Пример.** Нека $g(z) = e^z$. Тогаш, орбита во точката $2 \in \mathbb{C}$ е множеството $\{2, g(2), g^2(2), g^3(2) \dots\} = \{2, e^2, e^{e^2}, e^{e^{e^2}} \dots\}$

# Нормална фамилија

**Дефиниција.** Нека е $\mathcal{F}$ фамилија од транцедентни цели функции. Велиме дека $\mathcal{F}$ е *нормална фамилија* ако секоја низа функции од $\mathcal{F}$ содржи подниза која конвеегира униформно во некоја транцедентна цела функција или во $\infty$, на секое компактно подмножество $D$ од $\mathbb{C}$.

# Фату и Јулија

Нека е $f$ транцедентна цела функција.
При итерирање на функцијата $f$, комплексната рамнина се разделува на две динамички интересни и важни множества.

Слика: Пјер Фату

Слика: Гастон Јулија

# Множество на Фату и Множество на Јулија

Кога точки од доменот на функцијата $f$ кои се близу се однесуваат слично при итерирање, велиме дека припаѓаат во множеството на Фату. $F(f)$ **ги содржи сите точки $z$ кои имаат стабилно однесување при итерирање.**

$F(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^n\}$ е нормална фамилија во околина на точката $z\}$

Множеството на Јулија е дефинирано како комплемент од $F(f)$, односно $J(I) = \mathbb{C} \backslash F(f)$. $J(f)$ **ги содржи сите точки $z$ кои имаат хаотично однесување при итерирање.**

- Од самата дефиниција следува дека $F(f)$ е отворено множество, па така $J(f)$ е затворено.
- $F(f)$ и $J(f)$ се *потполно инваријантни* множества, т.е. $z \in F(f) \iff f(z) \in F(z)$. Слично и за $J(f)$.
- $F(f^n) = F(f)$ и $J(f^n) = J(f), \forall n \in \mathbb{N}$.

# Множеството за бегство и Хипотезата на Ерменко

**Дефиниција.** Сите точки од доменот на функцијата $f$ кои тежат кон бесконечност при итерирање, го сочинуваат *множеството за бегство*, $I(f)$.

$$I(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \to \infty \text{ as } n \to \infty\}$$

Основни особини:

1. $I(f) \neq \emptyset$
2. $I(f) \cap J(f) \neq \emptyset$
3. $\partial I(f) = J(f)$
4. Сите компоненти во $\overline{I(f)}$ се наограничени.

**Ерменко (1984).** Нека е $f$ транцедентна цела функција. *Секоја компонента во $I(f)$ е неограничена.*

**Парцијален резултат.** Постои барем една компоенета во $I(f)$ која е неограничена.

# Брзо бегство и особини

*Множеството за брзо бегство* ги содржи сите точки од доменот на функцијата $f$ кои тежат кон $\infty$ што е можно побрзо.

**Дефиниција.** Нека со $M(R, f)$ го означиме максималниот модул од $f$ на круг со радиус $R$,

$$M(R.f) = \max_{|z|=R} |f(z)|$$

Избираме доволно големо $R > 0$ така што $M^n(R, f) \to \infty$ as $n \to \infty$.
**Дефиниција.** Множеството за брзо бегство е

$$A(f) = \{z \in \mathbb{C} : \exists L \in \mathbb{N} \text{ така што } |f^{n+L}(z)| \geq M^n(R, f) \text{ за сите } n \in \mathbb{N}\}$$

1. $A(f) \neq \emptyset$
2. $A(f^n) = A(f)$ бидејќи $A(f)$ е потполно инваријантно
3. $A(f) \cap J(f) \neq \emptyset$
4. $\partial A(f) = J(f)$
5. Сите компоненти во $A(f)$ се наограничени.

# Максимално множество за брзо бегство

**Дефиниција.** *Максималното множество за брзо бегство* е

$$A'(f) = \{z \in A(f) : \exists N \in \mathbb{N} \text{ така што } |f^n(z)| = M(|f^{n-1}(z)|, f) \text{ за } n \geq N\}$$

па, *не-максималното множество за брзо бегство* е

$$A''(f) = A(f) \backslash A'(f)$$

1. $A'(f) \neq \emptyset$
2. $A''(f) \cap J(f) \neq \emptyset$
3. $A'(f)$ и $A''(f)$ се потполно инваријантни множества.
4. Ако $A'(f) \cap F(f) = \emptyset$ тогаш $J(f) = \partial A''(f)$
5. Ако $A'(f) \cap J(f) \neq \emptyset$ и $A'(f) \cap F(f) = \emptyset$ тогаш $J(f) = \partial A'(f)$
6. Постои транцедентална цела функција $f$ така што $A'(f)$ е непреброиво множество и тотално неповрзано и, $A''(f)$ има непреброиво многу единечни компоненти и барем една неограничена компонента.

- D. J. SIXSMITH. *MAXIMALLY AND NON-MAXIMALLY FAST ESCAPING POINTS OF TRANSCENDENTAL ENTIRE FUNCTIONS*. https://arxiv.org/abs/1403.7362
- BISHNU HARI SUBEDI, AJAYA SINGH. *A REVIEW ON THE STRUCTURE AND PROPERTIES OF THE ESCAPING SET OF TRANSCENDENTAL ENTIRE FUNCTIONS*. The Nepal Math. Sc. Report, Vol. 34, No. 1 and 2, 2016

# Простор за прашања

# Благодарам на вниманието!