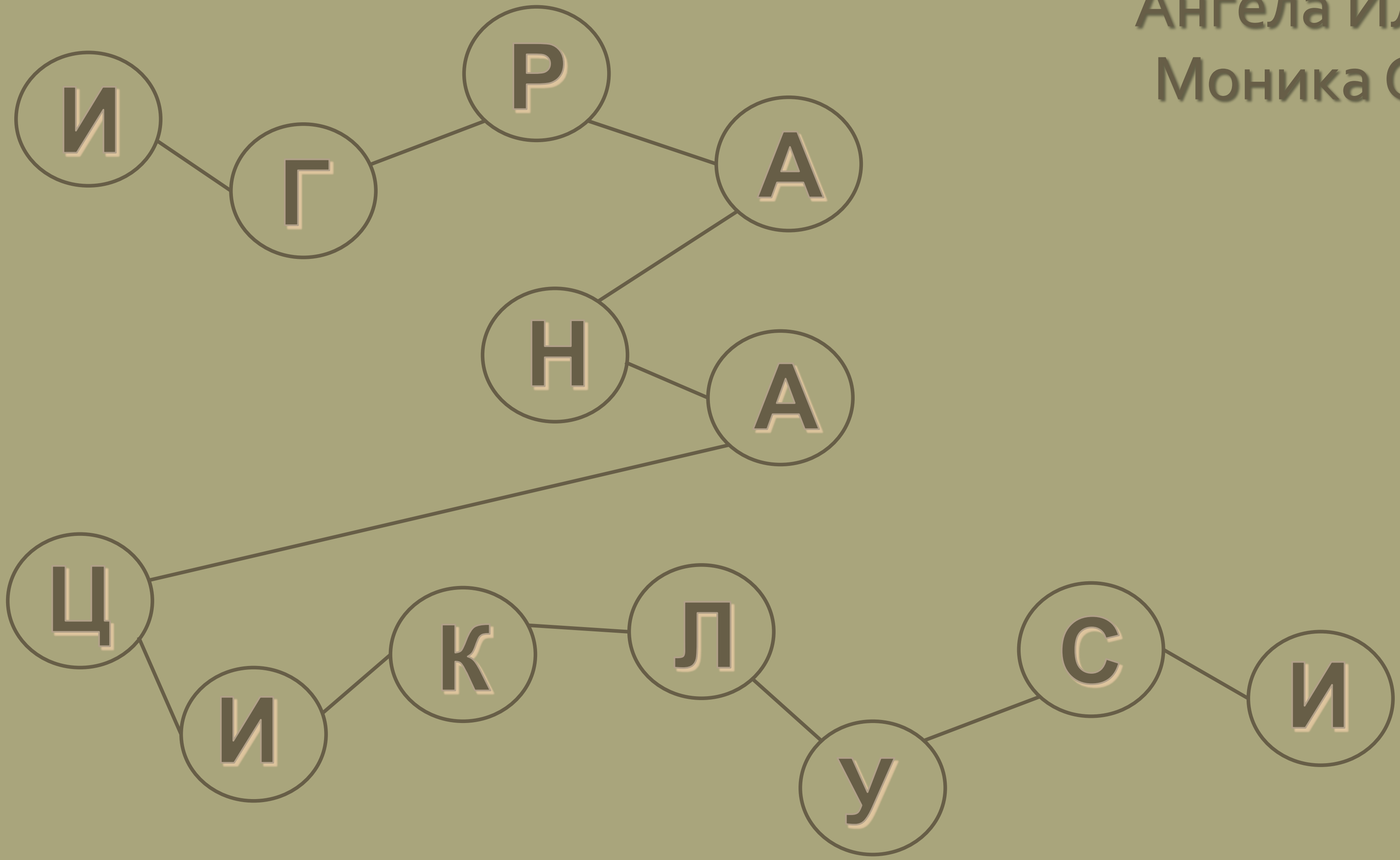


Ангела Илиевска
Моника Симова

Шести семинар “Математика и примени“,17 март 2023

Институт за математика, Природно-математички факултет

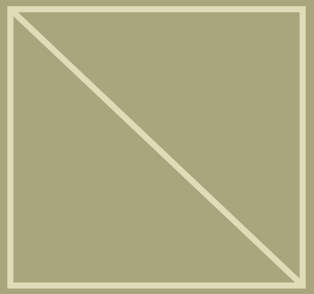
Универзитет “Св. Кирил и Методиј“-Скопје

Вовед

- Игра на циклуси-игра со двајца играчи
- Се игра на ненасочен планарен граф [1] (табла за игра)

- Претпоставуваме дека графот е сврзан т.е секое теме може да се поврзе со ребро со секое друго теме.

[1]Планарен граф-акко графот може да се нацрта во рамнината т.ш неговите ребра,освен во темиња на графот, немаат други заеднички точки.



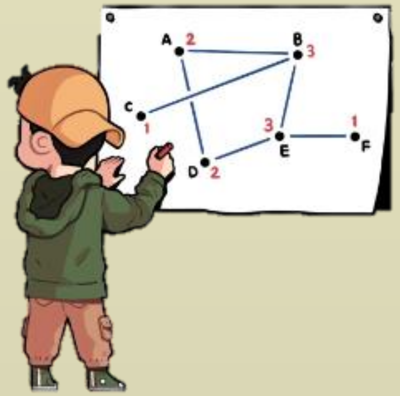
Пример за планарен граф кој може да го користиме како табла за игра.

- Играта има и тополошки аспект

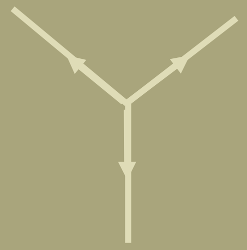
Како се игра?

На секој наш ред, означуваме едно ребро со стрелка за да му дадеме насока.

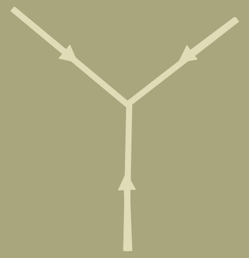
Откако некое ребро е насочено, другиот играч не може повторно да го означи. Стрелките имаат иста функција во играта без разлика кој ги означува.



Правило: не можеме да означиме ребро така што ќе создаде излив (теме чие сите ребра се насочени од него), или слив (теме чие сите ребра се насочени кон него).



излив

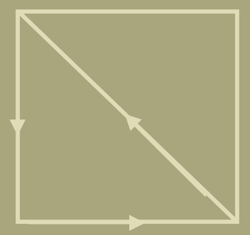


слив

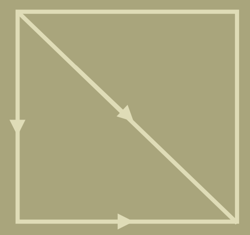
Целта на играта е да се направи циклусна ќелија [2]. Првиот играч што ќе создаде циклусна ќелија победува.

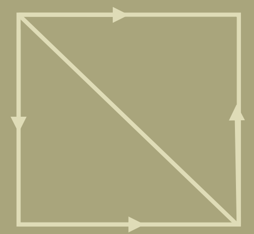
Но ако играта заврши без циклус, играчот што ќе го направи последниот можен потег се прогласува за победник.

[2] Циклусна ќелија е насочен циклус на ребра кој не содржи други циклуси.



циклусна ќелија

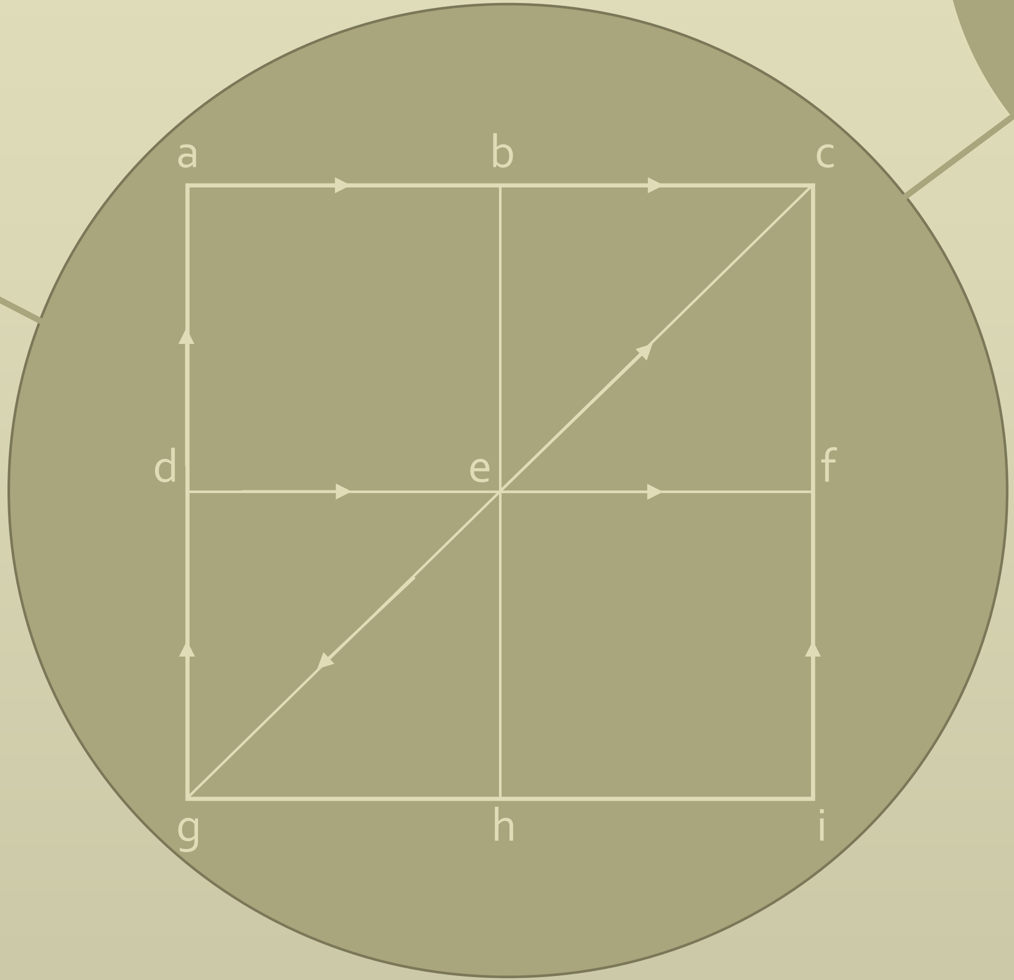




не се циклусни ќелии

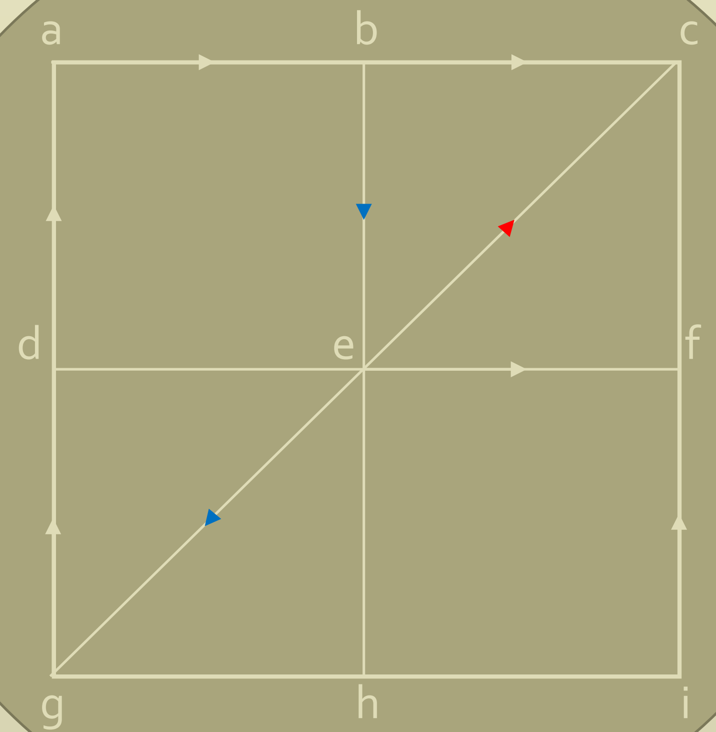
Death move

Ако означите ребро со стрелка така што таа е претпоследната стрелка на ќелијата на потенцијалниот циклус, тој потег ќе му овозможи на вашиот противник да го заврши циклусот и да победи. Таквиот потег го нарекуваме death move за таа ќелија.



Ако го означите реброто eg (e → g), тоа би било death move за вас. Противникот потоа може да игра d → e за да го заврши циклусот e → g → d → e и да победи.

Ако имате триаголник со едно обележано ребро, избегнувањето на death move ќе ја ограничи насоката во која можете да ги обележите другите две ребра на тој триаголник.

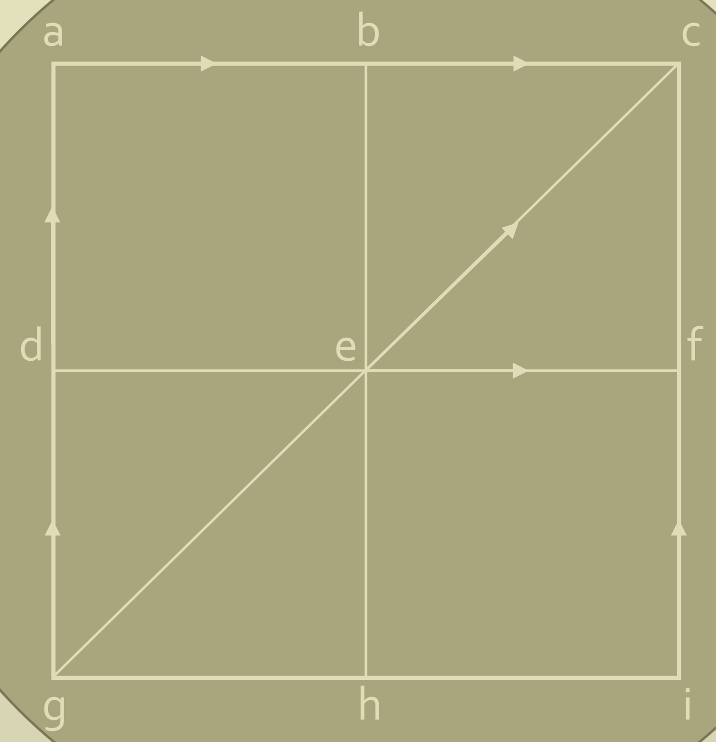


Ако сега означите едно од нив со стрелка со која одбегнува death move (пример: ec (e → c), тогаш тој триаголник (cef) е нецикличен, т.е повеќе нема да може да се направи циклусна ќелија

Означување на реброто de, во било која насока, би било death move. Противникот може веднаш да ја заврши ќелијата со квадратен циклус (be) над неа или ќелија со триаголен циклус (eg) под неа.

Правило на слив-излив

Темето чие сите ребра, освен едно, се насочени кон него тогаш тоа теме е речиси слив. Доколку неозначеното ребро го насочиме кон темето, тогаш тоа теме е слив, со што се прекршува правилото за слив. Слично и за речиси излив.



Пример: Темето c е речиси слив, а темето i е речиси излив.

Необележливо ребро е ребро кое се наоѓа помеѓу два речиси слива (излива) каде не е дозволено обележување на реброто бидејќи едната насока ќе создаде слив(излив) на едното теме, а другата насока на другото теме.

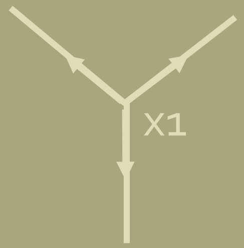
Пример за необележливо ребро е cf. Ако означиме c → f, тогаш темето f е слив, во спротивно темето c е слив.

Тополошки аспект

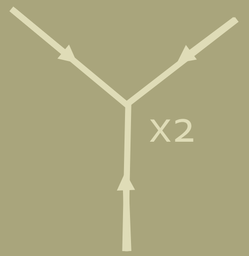
Тополошко својство: таблата каде сите ребра се означени мора да содржи циклус. Тоа значи дека играта завршува со циклус, односно последниот можен потег е потег кој ќе формира циклусна ќелија.

За точките x1 и x2 не важи теоремата на Броуер бидејќи тие не се фиксни точки.

Правилото на слив-излив е тесно поврзано со топологијата, поточно со теоремата за фиксна точка на Броуер. [3]



излив

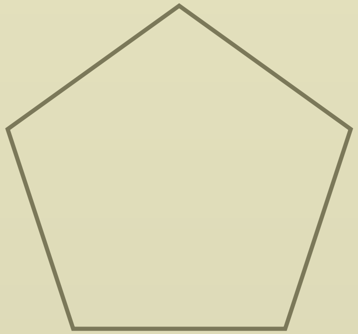


слив

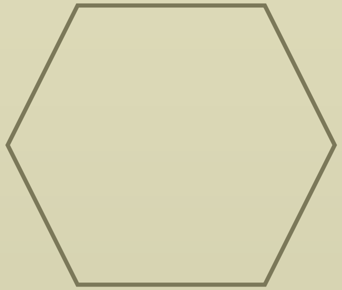
[3] Секоја непрекината функција $f: S \to S$ има фиксна точка $x \in S$ така што $f(x) = x$.

Лема: Доколку на таблата Cn (табла со n-темиња) останат неозначени ребра, бројот на необележливи ребра мора да биде парен.

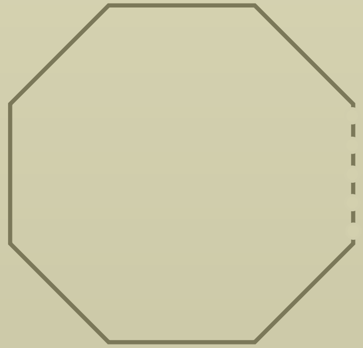
Доказ: Ако останат неозначени ребра, тогаш не може да има две соседни необележливи ребра. Во спротивно, едно од овие ребра би било обележливо, што е контрадикција. Гледаме и дека соседните означени ребра мора да бидат насочени во иста насока, инаку ќе се прекрши правилото на слив-излив. На крајот, секое необележливо ребро одвојува два синџири кои се насочени во спротивни насоки. Ако избереме едно означено ребро и се движиме околу таблата во избраната насока, тогаш знаеме дека бројот на пати кога ќе “означиме” необележливо ребро ќе биде парен број бидејќи мора да завршиме свртени кон истата насока кога ќе се вратиме на првобитното ребро. Бројот на пати кога синџирите ја менуваат насоката мора да биде парен, ова покажува дека бројот на необележливи ребра, исто така, мора да биде парен.



Табла C5



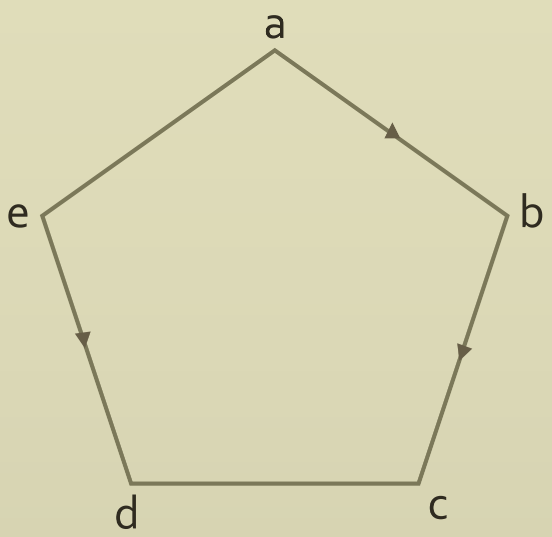
Табла C6

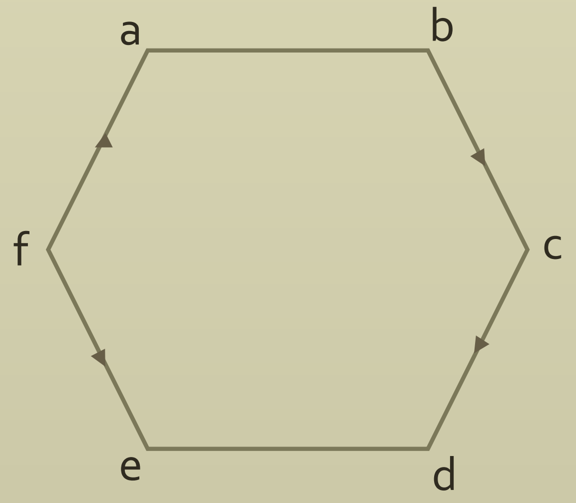


Табла Cn

Победнички стратегии

Теорема 1: Играта на табла Cn е целосно одредена од парноста. Ако n е непарен, играчот 1 победува. Ако n е парен, играчот 2 победува.





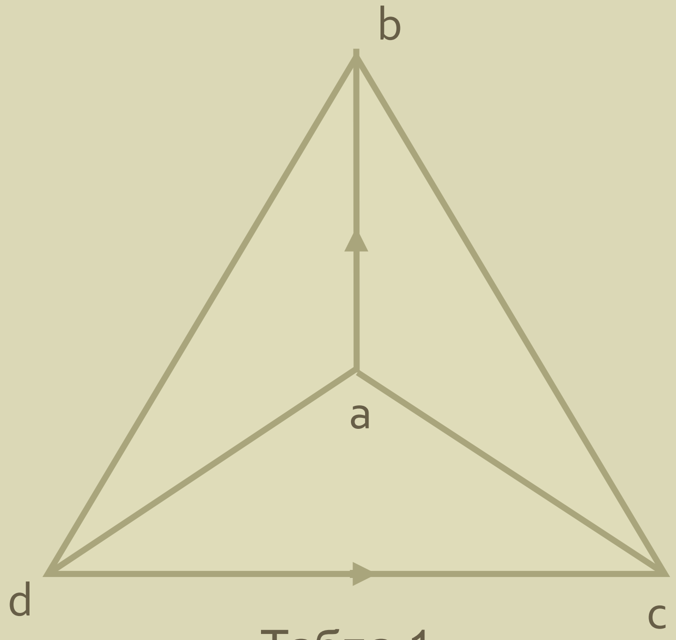
Доказ: Знаеме дека играта завршува кога играчот ќе ја заврши ќелијата од циклусот (за n-табла ќе требаат n потези) или кога играчот ќе го означи последното можно ребро. Од претходната Лема, бројот на необележливи ребра оставени на крајот на играта мора да биде парен. Бројот на направени потези е еднаков на разликата на вкупниот број на ребра и бројот на необележливи ребра во таблата по последниот потег. Така, победникот на играта се определува целосно според парноста.

Теорема 2: На табла К4, играчот 2 има победничка стратегија.

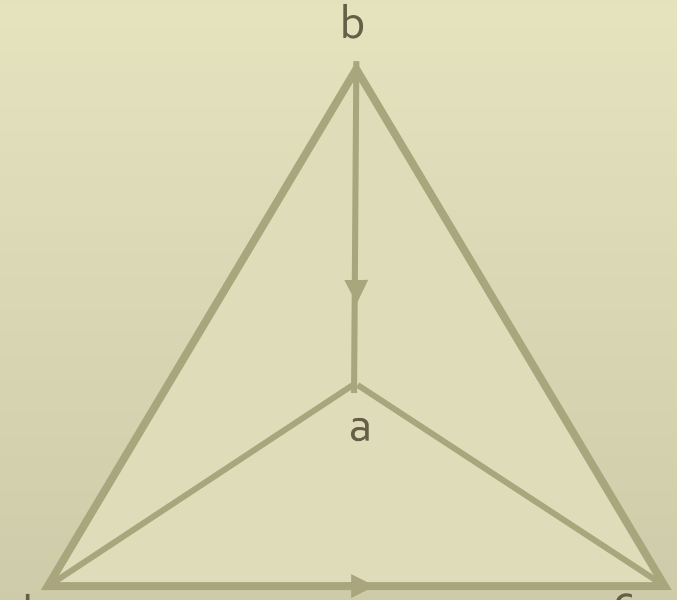
Играчот 1 го прави првиот потег, па играчот 2 треба да означи ребро кое не е соседно од она на играчот 1 како на табла 1 или табла 2.

Го разгледуваме случајот на табла 1, кога реброто ab е означено со стрелка a → b. Означувањето a→ d е death move за играчот 1 бидејќи играчот 2 може да направи циклус со означување c→ a.

Има три слободни втори потези за играчот 1: (d→b, a→c, c→b)
Секое од овие ребра има само едно движење кое не е death move, бидејќи сите три триаголници веќе имаат насока одредени од првите потези на двајцата играчи.

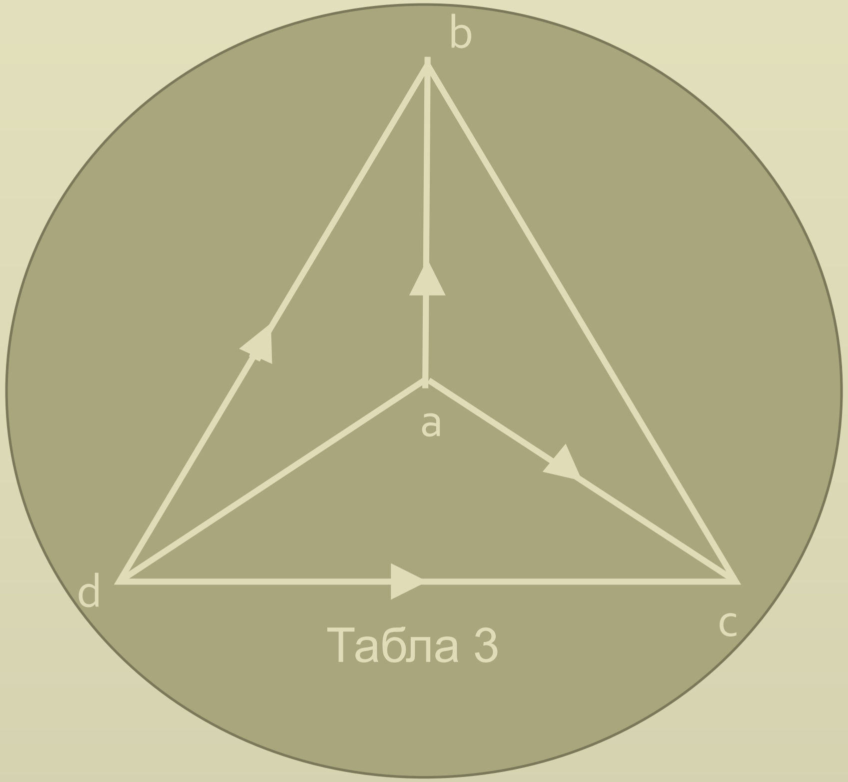


Табла 1

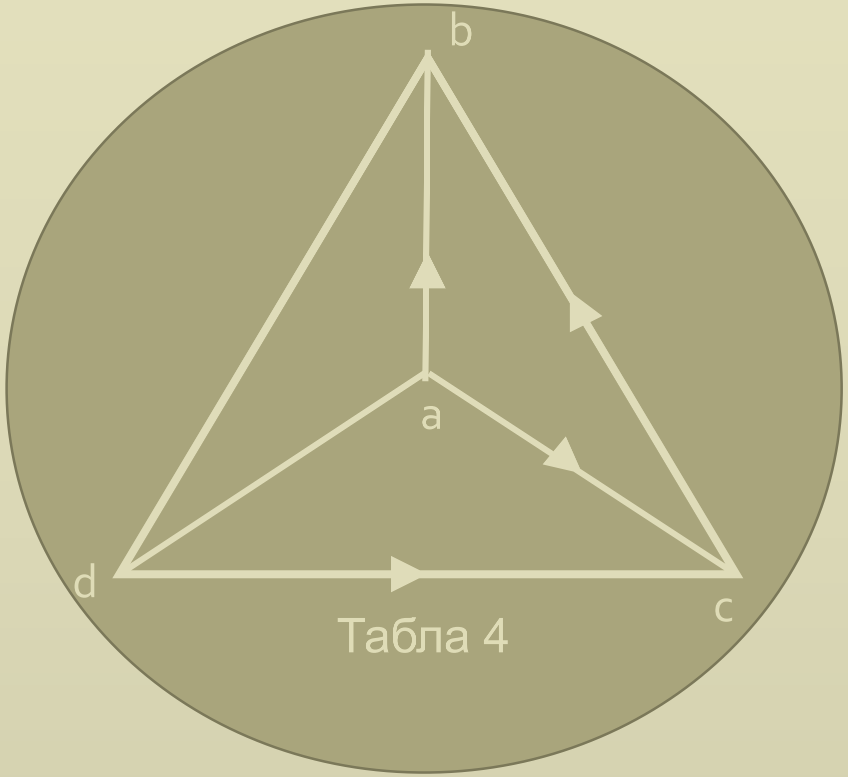


Табла 2

Откако играчот 1 ќе го направи својот потег, играчот 2 може да игра на еден од следниве два начина:



Табла 3



Табла 4

Затоа, играчот 2 победува во двата случаи. Аргументот за Табла 2, во кој реброто ab е означено b → a, е аналоген, што доведува до победа на Играчот 2. Така, Играчот 2 има победничка стратегија

Во првиот случај, играта е завршена бидејќи преостанатите ребра се необележливи поради правилото на слив-излив.

Во вториот случај, остануваат само death moves за Играчот 1. Затоа, играчот 2 победува во двата случаи.

Ви благодарим на вниманието!