ШЕСТИ СЕМИНАР „МАТЕМАТИКА И ПРИМЕНИ“, 17 МАРТ 2023

ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКА

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“, СКОПЈЕ

СТРОГО КОНВЕКСНИ И РАМНОМЕРНО КОНВЕКСНИ НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

Ристо Малчески

Самоил Малчески

Абстракт. Изучувањето на строго конвексните и рамномерно конвексните нормирани простори е важно за осознавањето на геометриската структура на нормираните простори. Оттука, од посебен интерес е наоѓањето на потребни и доволни услови за да еден нормиран простор биде строго конвексен, односно рамномерно конвексен. Токму на карактеризациите на строго конвексните и рамномерно конвексните нормирани простори и презентирањето на соодветни примери е основната цел на овој стручен труд.

1. ВОВЕД

1.1. Дефиниција. Нека L е реален векторски простор и $\|\cdot\|$ е реална функција на L за која важи:

i) $\|a\| \geq 0$, за секои $a \in L$ и $\|a\| = 0$ ако и само ако $a = 0$;

ii) $\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$, за секој $a \in L$ и за секој $\alpha \in \mathbb{R}$,

iii) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, за секои $a, b \in L$.

Функцијата $\|\cdot\|$ се нарекува *норма* на L, а $(L, \|\cdot\|)$ се нарекува *нормиран простор*. Неравенството *iii*) е познато како *неравенство на триаголник*.

1.2. Теорема. Нека $(L, \|\cdot\|)$ е нормиран простор и $x_i \in L$, $i = 1, \dots, n$.

а) Ако $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\| \leq \alpha_1 \|x_1\| + \alpha_2 \|x_2\| + \dots + \alpha_n \|x_n\|. \tag{1}$$

б) Ако $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_i \leq 0$, за $i = 2, 3, \dots, n$, тогаш

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq \alpha_1 \|x_1\| + \alpha_2 \|x_2\| + \dots + \alpha_n \|x_n\|. \tag{2}$$

1.3. Забелешка. Ако во неравенството (1) ставиме $\alpha_i = 1,\ i = 1,\dots,n$ добиваме дека за секои $x_i \in L$, $i = 1,\dots,n$ точно е неравенството

$$\| x_1 + x_2 + \dots + x_n \| \le \| x_1 \| + \| x_2 \| + \dots + \| x_n \| . \tag{3}$$

1.4. Теорема. Нека $(L, \|\cdot\|)$ е нормиран простор и $x_i \in L$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогаш

$$\| x_1 + x_2 + \dots + x_n \| = \| x_1 \| + \| x_2 \| + \dots + \| x_n \| , \tag{4}$$

ако и само ако

$$\| \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \| = \alpha_1 \| x_1 \| + \alpha_2 \| x_2 \| + \dots + \alpha_n \| x_n \| , \tag{5}$$

за секои $\alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, n$.

2. СТРОГО КОНВЕКСЕН НОРМИРАН ПРОСТОР. ЕЛЕМЕНТАРНИ КАРАКТЕРИЗАЦИИ

2.1. Важен дел од осознавањето на геометрисаката структура на нормираните простори е изучувањето на строго конвексните нормирани простори, кои се дефинираат како што следува.

Дефиниција. Нормираниот простор $(L, \|\cdot\|)$ го нарекуваме *строго конвексен* ако од $\|x\| = \|y\| = 1$ и $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, за $x, y \in L$, следува $x = y$.

2.2. Теорема. За нормираниот простор $(L, \|\cdot\|)$ следните тврдења се еквивалентни:

i) $(L, \|\cdot\|)$ е строго конвексен,

ii) Ако $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, тогаш $\|\frac{1}{2}(x + y)\| < 1$.

2.3. Важна класа нормирани простори се предхилбертовите простори за кои е точна следнава торема.

Теорема. Предхилбертов простор е строго конвексен.

2.4. Пример. Во множеството од ограничени низи реални броеви l^{∞} со

$$\| x \| = \sup_{i \in \mathbb{N}} | x_i |, \quad x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l^{\infty}$$

е дефинирана норма, што значи дека $(l^{\infty}, \| \cdot \|)$ е реален нормиран простор. За векторите

$$x = (1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2^2}, \dots, 1-\frac{1}{2^n}, \dots) \text{ и } y = (0, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2^2}, \dots, 1-\frac{1}{2^{n-1}}, \dots)$$

важи $\| x \| = \| y \| = \| \frac{x+y}{2} \| = 1$, но $x \neq y$, што значи дека l^{∞} не е строго конвексен нормиран простор. ■

2.5. Пример. Нека (Y, M) е измерлив простор, μ е позитивна мера на M, $X = L^p(\mu)$,$1 < p < \infty$ е просторот $X = \{ f : Y \to \mathbb{C} \vdots \int_Y | f |^p d\mu < +\infty \}$. Функцијата $\| \cdot \| : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ определена со: $\| f \| = \{\int_Y | f(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}$, е норма на $X = L^p(\mu)$.

Нека $\| f \| = \| g \| = 1$ и $f \neq g$. Тогаш од неравенството на Минковски следува дека

$$\| f + g \| = (\int_Y | f(x) + g(x) |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_Y | f(x) |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_Y | g(x) |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \| f \| + \| g \| = 1 + 1 = 2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако постои $\alpha > 0$ таков што

$$f(x) = \alpha g(x) ,$$

скоро секаде. Меѓутоа, бидејќи $\| f \| = \| g \| = 1$ добиваме

$$1=\| f \|=\{\int_Y | f(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}=\{\int_Y |\alpha g(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}=\alpha\{\int_Y | g(x)|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}$$
$$=\alpha \| g \|=\alpha \cdot 1=\alpha.$$

Последното противречи на $f \neq g$, па затоа $\| f+g \|< 2$, т.е. $\| \frac{f+g}{2} \|<1$, што според теорема 2.2 значи дека нормираниот простор $X=L^p(\mu)$ е строго конвексен.

Понатаму, просторите l^p чии елементи $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ такви што $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p < \infty$ дел од просторите L^p, при што се интегрира по мерата на броење целите броеви, па затоа овие простори се строго конвексни. ■

2.6. За нормата на нормираниот простор $(L, \|\cdot\|)$ велиме дека е *строго конвексна по модул* $c > 0$ ако

$$\| tx + (1-t)\, y \|^2 \leq t \| x \|^2 + (1-t) \| y \|^2 - ct(1-t) \| x - y \|^2 \qquad (*)$$

за секои $x, y \in L$ и за секој $t \in (0,1)$. Нормата ја нарекуваме *средно строго конвексна по модул* $c > 0$ ако неравенството (*) важи само за $t = \frac{1}{2}$, т.е. ако

$$\| \frac{x+y}{2} \|^2 \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \frac{c}{4} \| x - y \|^2 ,$$

за секои $x, y \in L$. Точна е следнава теорема.

Теорема. Ако $(L, \|\cdot\|)$ е реален нормиран простор со средно строго конвексна норма по модул $c > 0$, тогаш L е строго конвексен.

2.7. Забелешка. Бидејќи секоја строго конвексна норма по модул $c > 0$ е средно строго конвексна норма по модул $c > 0$ од претходната теорема следува дека нормиран простор со строго конвексна норма по модул $c > 0$ е строго конвексен.

2.8. Теорема. За векторскиот нормиран простор $(L,\|\cdot\|)$ следните тврдења се еквивалентни:

a) $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен.

b) Од $\| x+y\|=\| x\|+\| y\|$ следува $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$.

c) Од $\| x-u\|=\alpha\| x-y\|, \| y-u\|=(1-\alpha)\| x-y\|$, $\alpha\in(0,1)$ следува

$$u=(1-\alpha)x+\alpha y.$$

2.9. Теорема. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) $(L,\|\cdot\|)$ е строго конвексен.

2) Ако $\frac{1}{2}\| x+y\|=\| x\|=\| y\|$, тогаш $x=y$.

3) Ако $\| x+\alpha y\|=2\| x\|$ за некој $\alpha>0$, тогаш $x=\alpha y$, и $\alpha=1$ ако $\| x\|=\| y\|$.

4) Ако $\| x+y\|=\| x\|+\| y\|$, тогаш $x=\beta y$ за некој $\beta>0$.

5) Ако $\| x-w\|=\| x-y\|+\| y-w\|$, тогаш $y=(1-\gamma)x+\gamma w$, за некој $\gamma\in(0,1)$.

6) Ако $\| x+y\|=\| x-y\|=\| x\|$, тогаш $y=0$.

2.10. Во теорема 1.4 докажавме дека во нормиран простор важи

$$\| x_1 + x_2 + \ldots + x_n \| = \| x_1 \| + \| x_2 \| + \ldots + \| x_n \| , \tag{2}$$

ако и само ако

$$\| \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \| = \alpha_1 \| x_1 \| + \alpha_2 \| x_2 \| + \ldots + \alpha_n \| x_n \| , \tag{3}$$

за секои $\alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Во случај кога просторот $(L, \| \cdot \|)$ е строго конвексен, точна е следнава теорема.

Теорема. Нека $(L, \| \cdot \|)$ е строго конвексен нормиран простор и $x_i \in L$, $i = 1, 2, \ldots, n$ се ненулти вектори. Тогаш равенствата (2) и (3) се еквивалентни на равенствата

$$\frac{x_1}{\| x_1 \|} = \frac{x_2}{\| x_2 \|} = \ldots = \frac{x_n}{\| x_n \|} . \tag{4}$$

2.11. Познато е дека ако x и y се ненулти вектори, тогаш точни се неравенствата

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\}, \tag{5}$$

$$\|x+y\| \geq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \max\{\|x\|, \|y\|\}. \tag{6}$$

Во следната теорема ќе дадеме потребен и доволен услов за да во случај на строго конвексен простор во неравенствата (5) и (6) важи знак за равенство.

Теорема. Нека $(L, \|\cdot\|)$ е строго конвексен нормиран простор и $x, y \in L$ се ненулти вектори, при што важи $\|x\| < \|y\|$. Тогаш

$$\|x+y\| + \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \|x\| = \|x\| + \|y\| \tag{7}$$

ако и само ако постои $\alpha \in (0,1)$ таков што $x = \pm\alpha y$.

3. НАТАМОШНИ КАРАКТЕРИЗАЦИИ НА СТРОГО КОНВЕКСЕН НОРМИРАН ПРОСТОР

3.1. Дефиниција. Нека $x, y \in L$. Множеството

$$[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha)\, y \mid \alpha \in [0,1]\}$$

го нарекуваме *отсечка* (*сегмент*) *со крајни точки* x и y. Множеството

$$(x, y) = \{\alpha x + (1-\alpha)\, y \mid \alpha \in (0,1)\}$$

го нарекуваме *внатрешност на отсечката (сегментот) со крајни точки* x и y.

3.2. Теорема. Нека $(L, \|\cdot\|)$ е нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) $(L, \|\cdot\|)$ е строго конвексен.
2) Ако $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, за $x, y \in L$, тогаш множеството

$$[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha)\, y \mid \alpha \in [0,1]\}$$

е линеарно зависно.

3.3. Дефиниција. Нека L е нормиран простор, $x, z \in L$ и $r > 0$. Множеството $B(x,r) = \{y \in L \mid \| y - x \| < r\}$ го нарекуваме *отворена топка со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $B(0,1)$ ја нарекуваме *единична отворена топка*. Множеството $B[x,r] = \{y \in L \mid \| y - x \| \leq r\}$ го нарекуваме *затворена топка со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $B[0,1]$ ја нарекуваме *единична затворена топка*. Множеството $S(x,r) = \{y \in L \mid \| y - x \| = r\}$ го нарекуваме *свера со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $S(0,1)$ ја нарекуваме *единична свера*. Јасно, $B(x,r) \subseteq B[x,r]$ и $B[x,r] = B(x,r) \cup S(x,r)$.

3.4. Лема. Нека L е нормиран простор. Ако $x, y \in L$ се ненулти вектори и $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$, тогаш $[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}] \subseteq S(0,1)$.

3.5. Теорема. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако од $\| x \| = \| y \| = 1$ и $[x, y] \subseteq S(0,1)$ следува $x = y$.

3.6. Теорема. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако е исполнет условот

од $x, y \in S(0,1)$, $x \neq y$ следува $\|\alpha x + \beta y\| < 1$, за $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta = 1$. (2)

3.7. За следната карактеризација на строго конвексните нормирани простори ќе ги користиме екстремалните точки на конвексните множества.

Дефиниција. Нека C е конвексно множество во нормираниот простор L. Точката $z \in C$ ја нарекуваме *екстремална* (*крајна*) *точка за множеството* C ако од $z = tx + (1-t)\,y$, за некој $t \in (0,1)$ и некои $x, y \in C$ следува $x = y$.

3.8. Теорема. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако секоја точка од единичната свера е екстремална точка за затворената единична топка.

3.9. Пример. а) Во пример 2.5 докажавме дека просторот $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$ е строго конвексен. Сега, од теорема 3.8 следува дека секоја точка од единичната свера во $L^p(\mu)$ е екстремална точка за затворената единична топка во $L^p(\mu)$.

б) На векторскиот простор $\mathbf{C}_{[0,1]}$, од непрекинати функции на интервалот $[0,1]$, функцијата $\|\cdot\|: \mathbf{C}_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ определена со

$$\| x\| = \max_{s\in[0,1]} | x(t) | .$$

е норма, што значи дека $(\mathbf{C}_{[0,1]}, \|\cdot\|)$ е нормиран простор. За функциите

$$x(t) = 1,\ y(t) = 1 - t \in \mathbf{C}_{[0,1]}$$

важи

$$\| x\| = \max_{s\in[0,1]} | x(s) | = \max_{s\in[0,1]} |1| = 1 \text{ и } \| y\| = \max_{s\in[0,1]} | y(s) | = \max_{s\in[0,1]} |1 - s| = 1 ,$$

што значи дека $x, y \in S(0,1)$. Понатаму, за функцијата $u(t) = \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} y(t) = 1 - \frac{t}{2}$ важи $\| u\| = \max_{t\in[0,1]} |1 - \frac{t}{2}| = 1$, што значи дека $u \in S(0,1)$ и како таа не е екстремална за $B[0,1]$ заклучуваме дека просторот $(\mathbf{C}_{[0,1]}, \|\cdot\|)$ не е строго конвексен. ■

3.10. За следната карактеризација на строго конвексните нормирани простори ќе го воведеме поимот минимална точка во однос на множеството $M \subseteq L$.

Дефиниција. За точката $v \in L$ ќе велиме дека е *минимална во однос на множеството* M ако од $\| u - m \| \leq \| v - m \|$, $u \in L$, $m \in M$ следува $u = v$.

3.11. Теорема. Нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако за секои $x, y \in L$ точките од сегментот $[x, y] = \{tx + (1-t)\, y \mid \ t \in [0,1]\}$ се минимални во однос на множеството $\{x, y\}$.

4. РАМНОМЕРНО КОНВЕКСЕН НОРМИРАН ПРОСТОР

4.1. Дефиниција. Нормираниот простор $(L,\|\cdot\|)$ го нарекуваме *рамномерно конвексен* ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta(\varepsilon) > 0$ таков што од $\|x\|=\|y\|=1$ и $\|x-y\|\geq\varepsilon$ следува $\|x+y\|\leq 2(1-\delta(\varepsilon))$.

4.2. Теорема. Секој претхилбертов простор е рамномерно конвексен.

4.3. Теорема. Нека $(L,\|\cdot\|)$ е нормиран простор. Ако L е рамномерно конвексен, тогаш тој е строго конвексен.

4.4. Пример. Во пример 2.4 видовме дека нормираниот простор $(l^{\infty},\|\cdot\|)$ не е строго конвексен. Сега, од теорема 4.3 следува дека l^{∞} не е рамномерно конвексен. ■

4.5. Теорема. Нормираниот простор $(L,\|\cdot\|)$ е рамномерно конвексен ако и само ако за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што

1) $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ и

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$

важи $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

4.6. Теоремата 4.5 може да се запише во следнава еквивалентна формулација.

Теорема. Нормираниот простор $(L,\|\cdot\|)$ е рамномерно конвексен ако и само ако за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\|=1$ и

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$,

важи $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$. ■

4.7. Теорема. Секој конечнодимензионален строго конвекесен нормиран простор е рамномерно конвексен.

4.8. Во претходните разгледувања дадовме примери на нормирани простори кои или се и строго конвексни и рамномерно конвексни или не се строго конвексни и не се рамномерно конвексни. Понатаму, во теорема 4.3 докажавме дека од рамномерната конвексност следува строгата конвексност. Во следниот пример ќе разгледаме нормиран простор кој е строго конвексен, но не е рамномерно конвексен.

Пример. Нека $L = \{q(x) : q \text{ е полином на } [0,1]\}$. Јасно, L е векторски простор со вообичаените операции собирање на полиноми и производ на полином со реален број. Понатаму, со

$$\| p \| = \sqrt{\int_0^1 (p(x))^2 \, dx} + \sup_{0 \le x \le 1} | p(x) |, \quad p \in L \tag{2}$$

е определена норма на L. Навистина:

1) Од (2) следува $\| p \| \geq 0$, за секој $p \in L$ и $\| p \| = 0$ ако и само ако $p(x) = 0$, за секој $x \in [0,1]$.

2) За секој $\lambda \in \mathbb{R}$ и за секој $p \in L$ важи

$$\begin{aligned}
\| \lambda p \| &= \sqrt{\int_0^1 (\lambda p(x))^2 \, dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} | \lambda p(x) | \\
&= \sqrt{\int_0^1 (| \lambda | \, p(x))^2 \, dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} | \lambda | | p(x) | \\
&= | \lambda | \left(\sqrt{\int_0^1 (p(x))^2 \, dx} + \sup_{0 \leq x \leq 1} | p(x) | \right) \\
&= | \lambda | \cdot \| p \| .
\end{aligned}$$

3) За секои $p, q \in L$ од својствата на супремумот и неравенството на Минковски следува

$$\| p+q \| = \sqrt{\int_0^1 (p(x)+q(x))^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} | p(x)+q(x) |$$

$$\le \sqrt{\int_0^1 (p(x)+q(x))^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} (| p(x) | + | q(x) |)$$

$$\le \sqrt{\int_0^1 (p(x))^2\,dx} + \sqrt{\int_0^1 (q(x))^2\,dx} + \sup_{0\le x\le 1} | p(x) | + \sup_{0\le x\le 1} | q(x) |$$

$$= \| p \| + \| q \|.$$

Ќе докажеме дека L не е рамномерно конвексен простор. За таа цел ќе ги разгле-даме низите $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ определени со

$$p_n(x) = \tfrac{1}{2},\ q_n(x) = \tfrac{1}{2}(1 - x^n)\ , \text{ за } \ n = 1, 2, \dots .$$

Имаме

$$\lim_{n\to\infty} \| p_n \| = \lim_{n\to\infty} \Big(\sqrt{\int_0^1 (\tfrac{1}{2})^2\, dx} + \sup_{0\le x\le 1} \tfrac{1}{2}\Big) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \| q_n \| = \lim_{n\to\infty} \Big(\sqrt{\int_0^1 (\tfrac{1}{2}\,|\,1 - x^n\,|)^2\, dx} + \sup_{0\le x\le 1} \tfrac{1}{2}\,|\,1 - x^n\,|\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \tfrac{2}{n+1} + \tfrac{1}{2n+1}} + \tfrac{1}{2}\Big) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{2}(p_n + q_n) \| = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left|1 - \frac{x^n}{2}\right|\right)^2 dx} + \sup_{0\le x\le 1} \frac{1}{2}\left|1 - \frac{x^n}{2}\right| \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(2n+1)}} + \frac{1}{2} \right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \| p_n - q_n \| = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\int_0^1 \left|\frac{x^n}{2}\right|^2 dx} + \sup_{0\le x\le 1} \left|\frac{x^n}{2}\right| \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2n+1}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2},$$

што според теорема 4.6 значи дека $(L, \|\cdot\|)$ не е рамномерно конвексен.

Нека $\| p+q \| = \| p \| + \| q \|$. Од својствата на супремумот и неравенството на Минковски следува дека тоа е можно ако и само ако $p = \alpha q$, за некој $\alpha > 0$, па од теорема 2.8 следува дека L е строго конвексен нормиран простор. ■

4.9. Теорема. Нека $(L, \|\cdot\|)$ нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни.

(1) $(L, \|\cdot\|)$ е рамномерно конвексен.

(2) За секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што ако $\|x\| = \|y\|$ и $\|x - y\| \geq \varepsilon \|x\|$, тогаш $\frac{1}{2}\|x + y\| \leq (1 - \delta)\|x\|$.

(3) За секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta' > 0$ таков што ако $\|x - ay\| = \varepsilon \|x\|$, каде $a = \frac{\|x\|}{\|y\|}$, тогаш $\frac{1}{2}\|x + ay\| \leq (1 - \delta')\|x\|$.

(4) За секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што ако $\|x - ay\| \geq \varepsilon \|x\|$, каде $a = \frac{\|x\|}{\|y\|}$, тогаш $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| - \delta \|x\|$ или $\|x + y\| \leq 3\|x\| - \|y\| - \delta \|x\|$.

4.10. На крајот од овој дел ќе презентираме една интересна карактеризација на рамномерно конвексните простори користејќи функции дефинирани на сферата $S(0,1)$ на L. Ќе сметаме дека φ е строго конвексна и строго растечка функција на $[0,2]$, што значи дека таа е непрекината на $(0,2)$.

Теорема. Нормираниот простор $(L,\|\cdot\|)$ е рамномерно конвексен ако и само за секоја функција φ таква што $\varphi(1)=1$, за функцијата

$$h(t)=\inf\{\varphi(\|x+ty\|)+\varphi(\|x-ty\|)-2,\ \|x\|=\|y\|=1\}$$

важи $h(t)>0$, за секој $t\in(0,1]$.

Литература

1. Diestel, J.: Geometry of Banach space – Selected Topics, Springer-Verlag, Berlin-Neidelberg-New York, 1975
2. Istrăţescu, I. V.: Strict convexity and complex strict convexity (theory and applications), Marcel Dekker, New York – Basel, 1984
3. Petryshyn, W. V.: A Characterization of Strict Convexity of Banach Spaces and Other Uses of Duality Mappings, Journal of functional analysis 6, 282-291 (1970)
4. Riesz, F.; Sz.-Nagy, B.: Functional Analysis, Dover Publications, Inc., New York, 1990