Димензионалната анализа како математичка структура за изведување на законитости

Филип Николовски

Меѓународни Училишта НОВА

Работилница
Математиката и предвидувањата
Скопје, 11. мај 2016

- **Физичка димензија** е концепт од природните науки со помош на кој ги разликуваме **физичките величини**
- Со помош на физичката димензија може да се установи валидноста на врските помеѓу физичките величини, но и да се утврди поврзаност помеѓу физички величини без притоа да се познат начинот на поврзаност
- Последново е тема на ова излагање

- Секоја физичка величина Q има димензија $\delta(Q)$
- Физичката величина која е производ од рационални степени на други физички величини има димензија која е производ на рационалните степени на соодветните димензии:

$$\delta(Q_1^{a_1} Q_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot Q_n^{a_n}) = \delta(Q_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \delta(Q_n)^{a_1},$$

  каде $a_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- Во секоја област на интерес има **примарни димензии**, $\delta_1, \ldots, \delta_k$ и димензијата на секоја физичка величина од таа област може да се изрази како производ од рационални степени на примарните димензии:

$$\delta(Q) = \delta_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot \delta_k^{b_k},$$

  $b_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, \ldots, k$

Пример

- Масата M, должина L и времето T обично се избираат како примарни димензии во механиката и секоја физичка величина од оваа област може да се изрази преку овие димензии.
- Брзината има димензија LT^{-1}
- Силата има димензија MLT^{-2}

Нека Q_1 и Q_2 се физички величини. Важат следниве својства.

- Q_1 и Q_2 се споредливи акко $\delta(Q_1) = \delta(Q_2)$ и, специјално, $Q_1 = Q_2 \Rightarrow \delta(Q_1) = \delta(Q_2)$ (својство на **димензионална хомогеност**)
- $\delta(Q_1^{a_1} Q_2^{a_2}) = \delta(Q_1)^{a_1}\delta(Q_2)^{a_2}, \; a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$
- $Q_1 \pm Q_2$ е физичка величина акко $\delta(Q_1) = \delta(Q_2)$ и тогаш $\delta(Q_1 \pm Q_2) = \delta(Q_1) = \delta(Q_2)$
- За секој $\xi \in \mathbb{R}$ и било која физичка величина Q, $\delta(\xi) = \delta(Q^0) = \delta(Q)^0 = 1 := \delta_0$. Секоја величина Q за која $\delta(Q) = \delta_0$ се нарекува **бездимензионална** величина
- Величините кои се аргументи на неполиномни аналитички функции мора да бидат бездимензионални

Димензионална матрица
на физички величини во однос на примарни димензии

Нека за физичките величини Q и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ важи:

$$Q = Q_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{a_n}, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}.$$

Нека $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ се примарните димензии. Тогаш:

$$\delta(Q_j) = \delta_1^{m_{1,j}} \cdot \ldots \cdot \delta_k^{m_{k,j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\delta(Q) = \delta_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot \delta_k^{b_k}$$

Од принципот на димензионална хомогеност следи:

$$\delta(Q) = \delta(Q_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{a_n}),$$

од каде:

$$\delta_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot \delta_k^{b_k} = \delta_1^{m_{1,1} \cdot a_1 + \ldots + m_{1,n} \cdot a_n} \cdot \ldots \cdot \delta_k^{m_{k,1} \cdot a_1 + \ldots + m_{k,n} \cdot a_n}$$

Така го добиваме системот линеарни равенки:

$$\mathcal{M}a = b,$$

каде $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_k)^T$ и

$$\mathcal{M} = [m_{i,j}]_{k \times n}$$

Матрицата $\mathcal{M}$ се нарекува **димензионална матрица** на физичките величини $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ во однос на примарните димензии $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$.
Да забележиме дека Q е бездимензионална величина ако и само ако степените на примарните димензии се сите нула, што е еквивалентно со:

$$\mathcal{M}a = 0.$$

π-теорема на Бакингем (Buckingham)

Нека $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ се физички величини и нека $\mathcal{M}$ е нивната димензионална матрица во однос на примарните димензии $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, нека $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \mapsto f(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ е физички валидна врска и нека $p = \mathrm{rang}(\mathcal{M})$. Тогаш равенката:

$$f(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = 0$$

е еквивалентна со:

$$F(\pi_1, \ldots, \pi_{n-p}) = 0,$$

каде F е некоја функција, а π_i се бездимензионални величини кои може да се изразат како:

$$\pi_i = Q_1^{\alpha_{1,i}} \cdot \ldots \cdot Q_n^{\alpha_{n,i}}, \quad i = 1, \ldots, n-p$$

и $\alpha_{j,i} \in \mathbb{Q}$, а векторите $a_i = (\alpha_{1,i}, \ldots, \alpha_{n,i})$ формираат база за просторот решенија на хомогената равенка $\mathcal{M}a = 0$.

π-теорема на Бакингем (Buckingham)

Неформално, во теоремата се тврди дека врската помеѓу n физички величини, изразена како:

$$f(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = 0,$$

може да се изрази како врска од $n - p$ бездимензионални величини π_i каде $i = 1, \ldots, n - p$, изразена како:

$$F(\pi_1, \ldots, \pi_{n-p}) = 0,$$

кои се наоѓаат со помош на решенијата на хомогената матрична равенка $\mathcal{M}a = 0$.

Пример: период на математичко на нишало
при мали отклонувања од рамнотежната положба

Нека m и l се масата и должината на нишалото. Разумно е да претпоставиме дека периодот на нишалото τ зависи од m, l и од гравитационото забрзување g, т.е. $\tau = h(m, l, g)$. Ова може да го запишеме како:

$$f(\tau, m, l, g) = 0.$$

Димензионалната матрица M е:

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \tau & m & l & g \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

за која $n - p = 4 - 3 = 1$, па значи има единствена бездимензионална величина π т.ш. $F(\pi) = 0$.

Просторот решенија на системот $\mathcal{M}a = 0$ е зададен со $(2t, 0, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. За $t = 1$ решението е $a = (2, 0, -1, 1)^T$. Оттука:

$$\pi = \tau^2 m^0 l^{-1} g^1,$$

па заклучуваме дека:

$$\tau = \kappa_0 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

каде $\kappa_0 = \sqrt{\pi}$ е позитивна константа. Вредноста на κ_0 не може да се утврди со помош на методите на димензионалната анализа.

Цел: да го утврдиме начинот на зависност на брзината на тело при слободно паѓање од промената на висината. Очекуваме брзината v да зависи од изминатиот пат, т.е. разликата помеѓу почетната и крајната висина, h, од неговата маса m и од гравитационото забрзување g. Значи $v = \tilde{f}(h, m, g)$, од каде:

$$f(v, h, m, g) = 0.$$

Димензионалната матрица е:

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v & h & m & g \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

за која $n - p = 4 - 3 = 1$, па значи има единствена бездимензионална величина π т.ш. $F(\pi) = 0$.

Пример: брзина при слободно паѓање
на тело при занемарлив отпор на воздухот

Едно решение на системот $\mathcal{M}a = 0$ е $a = (-2, 1, 0, 1)^T$. Оттука:

$$\pi = v^{-2} h^1 m^0 g^1,$$

па заклучуваме дека:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\pi} gh} = \kappa_0 \cdot \sqrt{gh}$$

каде $\kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ е позитивна константа.

Британскиот физичар Џефри Тејлор успеал да ја оцени енергијата ослободена при експлозијата на првата нуклеарна бомба само со помош на димензионална анализа. Тој пошол од претпоставката дека радиусот на ударниот бран зависи од времето t изминато од моментот на експлозија, густината ρ на околниот воздух и ослободената енергија E, т.е.

$$R = h(t, \rho, E),$$

од каде:

$$f(R, t, \rho, E) = 0.$$

Димензионалната матрица е:

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & t & \rho & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

за која $n - p = 4 - 3 = 1$, па значи има единствена бездимензионална величина π т.ш. $F(\pi) = 0$. Едно решение на системот $\mathcal{M}a = 0$ е $a = (-5, 2, -1, 1)^T$. Така:

$$\pi = R^{-5} t^2 \rho^{-1} E^1,$$

од каде:

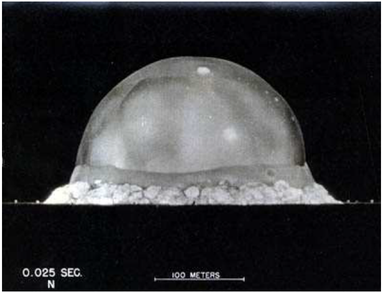
$$E = \kappa_0 \cdot \frac{R^5 \rho}{t^2}.$$

Формулата е точна за секоја експлозија, па низ експерименти со обични експлозиви е утврдено дека $\kappa_0 \approx 1$. Така за енергијата ослободена при експлозија имаме:

$$E \approx \frac{R^5 \rho}{t^2}.$$

Следно, останува да ја примениме формулата во пракса.

Првата нуклеарна бомба е детонирана во 5:30 часот на 16 јули 1945 близу Аламогордо во Ново Мексико, САД. Температурата изутрината била 20°, што значи дека $\rho \approx 1.204$ kg/m^3. Од следнава слика може да утврдиме дека $t = 0.025$ s после експлозијата радиусот на ударниот бран изнесувал $R \approx 130$ m.



Слика: Ударниот бран 0.025 секунди после детонацијата

Така добиваме:

$$E \approx \frac{130^5 \cdot 1.204}{0.025^2} = 7.15 \times 10^{13} \text{ J}.$$

Еден тон TNT ослободува енергија од 4.18×10^9 J, па заклучуваме дека енергијата ослободена при експлозијата на првата нуклеарна бомба е еквивалентна на околу **17.1 килотони TNT**. Американските проценки за еквивалентната моќ (кои биле чувани како воена тајна) биле во опсегот од 19 до 21 килотони.

F. Kappel,
Mathematical Modeling, Karl Franzens Universität, Graz, 2010

E. Buckingham,
On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations, Phys. Rev. **4**, 1914, 345-376

H. Hanche-Olsen,
A note on Buckingham's π-theorem,
`www.math.ntnu.no/~hanche/notes/buckingham/`
(пристапено: 7. мај 2016)