Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје

Природно – математички факултет

Институт за математика

БОЕЊЕ ГРАФОВИ

Изработил: Ментор:

Гордана Николовска Д-р Весна Целакоска – Јорданова

Април, 2016 година

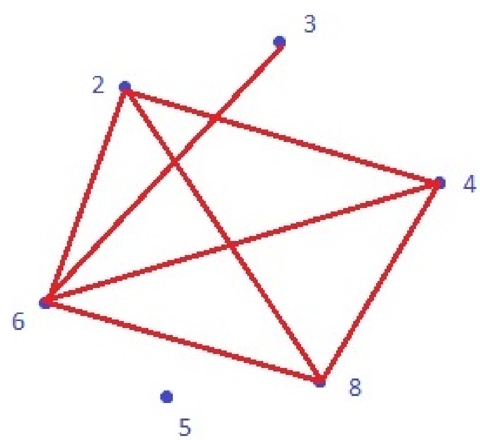
Вовед

Граф е апстрактен математички поим и претставува колекција од точки и линии коишто сврзуваат некое (можно е и празно) подмножество од тие точки. Точките од графот најчесто се викаат темиња, но се викаат и јазли или просто точки. Линиите што ги сврзуваат темињата на графот најчесто се викаат ребра, но се викаат и лаци или линии. Ако множеството X е множеството од темиња на графот, а U е множеството од ребра, тогаш секој елемент од множеството од ребра можеме да го запишеме како пар (x,y), каде што x,y се се елементи од X. Во зависност од тоа дали сите парови што го формираат множестовто U се подредени или не, разликуваме ориентиран, односно неориентиран граф.

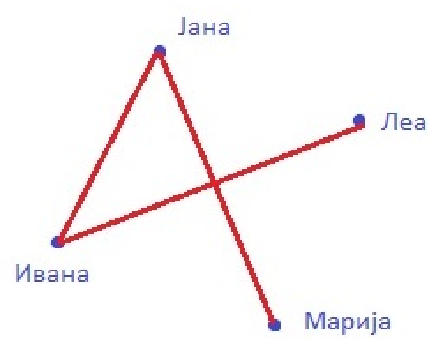
Графовите се многу практичен математички модел и се користат во разни области од науката и човековата дејност. Со помош на графови можат да се претставаат мрежи од места и патишта што ги поврзуваат, структурни формули на хемиските соединенија, луѓе и релации меѓу нив и слично. Во продолжение ќе бидат дефинирани основните поими од теоријата на графови, а посебно ќе бидат разгледани законитостите за боење на планарни графови и примери.

1. Основни поими во теоријата на графови

Дефиниција. Неориентиран граф е двојка G=(X,U) што се состои од конечно непразно множество X и едно зададено множество U од двоелементни подмножества од X. Елементите на X се нарекуваат темиња на графот и најчесто ги означуваме со букви: x,y,z и така натаму. Елементите на U ги нарекуваме ребра на графот и се означуваат со (x,y) или xy што претставува ребро кое ги поврзува темињата x и y. Притоа, за темињата x и y велиме дека се соседни. Графот е неориентиран ако релацијата за соседност е симетрична. Ако ребрата u и v имаат заедничко теме, велиме дека се соседни ребра. Графот до p темиња и q ребра го викаме (p,q) граф. Графот (1,0), составен од една точка, се вика тривијален граф.



Граф составен од темињата {2,3,4,5.6.8} каде две темиња се „соседни" ако имаат заеднички делител различен од 1.



Граф кој има за темиња четири девојчиња, а релацијата „соседни" е познанството меѓу нив: Ивана и Јана се познаваат, Јана и Марија се познаваат, Ивана и Леа се познаваат.

Дефиниција. Степен на темето x во графот G=(X,U) е бројот на ребра кои се инцидентни со x (соседни со заедничко теме x) во G. Ознака: deg(x). Пример, во горниот граф чиј темиња се {2,3,4,5,6,8}, deg(6)=4, deg(5)=0, deg(8)=3, deg(4)=3, deg(3)=1, deg(2)=3.

Теорема 1. Збирот на степените на сите темиња во графот G=(X,U) со p темиња и q ребра, е еднаков на удвоениот број од бројот на ребра на графот, т.е. $\sum_{x\in X}\deg(x) = 2q$.

Доказ. Секое ребро u=(x,y) додава по една единица во втепенит ена темињата x и y, значи додава две единици во вкупниот број на степени.

Дефиниција. Графот во кој сите темиња имаат еднаков степен m се вика регуларен граф од степен m. Графот G со p темиња е комплетен ако секое негово теме има степен p-1. Според теорема 1, следува дека бројот на ребра во комплетниот граф со p темиња изнесува $q = \frac{p(p-1)}{2}$.

Дефиниција. За графовите $G_1=(X_1,U_1)$ и $G_2=(X_2,U_2)$ велиме дека се изоморфни ако постои биективно пресликување $f: X_1 \to X_2$ такво што за произволни две темиња x и y од G_1 да важи: (x,y) е ребро во G_1 ако и само ако (f(x), f(y)) е ребро во G_2. Изоморфизмот на графови е релација на еквиваленција.

Дефиниција. Нека G=(X,U) е произволен граф. За двојката $G_1=(X_1,U_1)$ која се состои од непразно подмножество X_1 од X и подмножество U_1 од U, велиме дека е подграф на G ако самата за себе е граф, т.е. U_1 се состои од ребра на U кои поврзуваат парови темиња од X_1.

- Ако x_0 е теме од G, тогаш со (G-x_0) означуваме подграфот од G кој се добива со отстранување на темето x_0, заедно со ребрата кои се инцидентни со него.
- Ако u е ребро од G, тогаш со (G-u) означуваме подграфот од G кој се добива со отстранување на реброто u од G.
- Ако x_0 и y_0 се две несоседни различни темиња од G, со G+(x_0, y_0) го означуваме графот кој се добива кога кон G ќе се додаде ребро меѓу темињата x_0 и y_0.

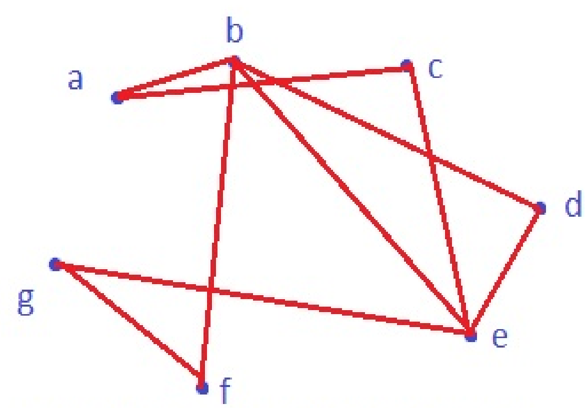
Дефиниција. За графот G велиме дека е сврзан граф ако за кои било негови темиња x и y, постои пат со почетно теме x и крајно теме y. Нека x е теме од графот G=(X,U). Со C_x го означуваме множеството кое се состои од темето x и сите темиња од G кои се со пат сврзани со темето x. Подграфот [C_x] од G кој е генериран од овие темиња се вика компонента на сврзаност на G во кој лежи x. Бројот на компоненти на сврзаност на графот G го означуваме со k(G).

Дефиниција. Маршрута во графот G=(X,U) е конечна наизменична низа од темиња и ребра x_0, u_1, x_1, u_2, … , u_n, x_n, која почнува и завршува со теме. За бројот n велиме дека е должина на маршуртата. Маршрутата е затворена ако x_0=x_n. Маршрутата е верига ако ниту едно ребро не се повторува два или повеќе пати во низата x_0, u_1, x_1, u_2, … , u_n, x_n. Маршрутата е пат ако ниту едно теме не се повторува два или повеќе пати во низата x_0, u_1, x_1, u_2, … , u_n, x_n. Маршрутата е циклус ако е затворена верига. Маршрутата е контура (циклус) ако е затворена и ниедно теме не се повторува два или повеќе пати во низата x_0, u_1, x_1, u_2, … , u_n, x_n, освен што x_0=x_n.

Дефиниција. За графот G=(X,U) велиме дека е бипартитен (дводелен) ако множеството темиња може да се разбие на две непразни дисјунктни подмножества X_1 и X_2, така што за секое ребро (x,y) од G да важи $x \in X_1$, $y \in X_2$.

Дефиниција.

За подмножеството темиња S од графот G=(X,U) велиме дека е внатрешно стабилно ако U(S)∩S=∅, каде што $U(x) = \{y | y \in X, (x,y) \in U\}$, а $U(S) = \cup \{U(x) | x \in S\}$ Со други зборови, ниту еден пар различни темиња од S не се меѓусебно соседни во G. Со Φ ја означуваме фамилијата од сите внатрешно стабилни подмножества темиња на графот G=(X,U). Број на внатрешна стабилност на графот G е бројот $\alpha(G) = max|S|, S \in \Phi$.



Пример: Внатрешно стабилно множество во графот составен од темињата {a,b,c,d,e,f,g} е множеството S={a,d,f}.

Дефиниција. Еден граф е планарен акко може да се нацрта во рамнината така што неговите ребра, освен во темињата на графот, немаат други заеднички точки.

2. Хроматски број на граф

Правилно обојување на граф е придружување бои на темињата на графот, при што ниеден пар соседни темиња не добиваат иста боја. Графот се нарекува n-обојлив ако неговите темиња може да се обојат со n бои.

Дефиниција. Хроматски број $\chi(G)$ на графот G=(X,U) е најмалиот број на бои со кои графот може правилно да се обои.

Теорема 2. За бројот на внатрешна стабилност $\alpha(G)$ и хроматскиот број $\chi(G)$ на графот G со p темиња важи: $\alpha(G)\,\chi(G) \geq p$.

Доказ. Нека графот G има p темиња. $\alpha(G)$ е најголемиот број на темиња кои формираат внатрешно стабилно подмножество. Значи, сите елементи кои припаѓаат на внатрешно стабилно множество со $\alpha(G)$ елементи се попарно несоседни. Хроматскиот број $\chi(G) \geq 1$ е најмалиот број на подмножества такви што секои два елементи избрани од исто подмножество се несоседни. Тогаш, секое вакво подможество може да има најмногу $\alpha(G)$ елементи, па следува дека $\alpha(G)\,\chi(G) \geq p$. Равенство важи ако во секое од подмножествата на кои е разбиен графот при боењето, има по $\alpha(G)$ елементи, т.е. секое такво подмножество е максимално внатрешно стабилно подмножество на графот G.

Теорема 3. (Теорема на König) Графот е бихроматски (има хроматски број 2) ако и само ако е бипартитен.

Доказ. Нека графот G е бипартитен. Тогаш множеството од темиња на G може да се претстави како дисјунктна унија од непразни подмножества X_1 и X_2, така што за секое ребро од G, едната точка од реброто припаѓа во X_1, а другата точка во X_2. Значи, секои две темиња избрани од исто подмножество, X_1 или X_2, се несоседни, па хроматскиот број е 2.

Нека G е бихроматски. Значи неговите темиња можат правилно да се обојат со две бои, т.е. множеството темиња да се разбие на две подмножества, така што во секое подмножество нема две соседни темиња. Значи, двете крајни темиња на секое ребро припаѓаат во различно од овие две подмножесва. Следува дека G е бипартитен.

Забелешка. Условот графот да биде бипартитен е еквивалентен со тоа G да не содржи контури со непарна должина.

Последица. За графот G, $\chi(G) \geq 3$ ако и само ако G има непарен циклус.

Теорема 4. За секој сврзан граф G важи $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ каде што $\Delta(G)$ е најголемиот степен на теме во графот.

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со индукција по n, каде што n е бројот на темиња на графот G.

Тврдењето важи за n=1, бидејќи тогаш G=K_1 (комплетен граф со индекс 1), $\Delta(G)$=0 и $\chi(G)$=1. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за n-1, т.е. $\chi(G) \leq \Delta(G-v) + 1$, каде што v е теме. Тоа значи дека графот $G - v$ може да се обои со $\Delta(G-v) + 1$ бои. Бидејќи $\Delta(G)$ е најголемиот степен на теме во графот G, темето v може да има најмногу $\Delta(G)$ соседи, кои може да се обојат со најмногу $\Delta(G)$ бои при боењето на графот $G - v$. Ако $\Delta(G) = \Delta(G-v)$, тогаш барем една боја не е искористена за боење на соседите на v, па таа може да се искористи за v, така што графот G ќе се обои со $\Delta(G) + 1$ бои. Ако $\Delta(G) \neq \Delta(G-v)$, тогаш $\Delta(G) > \Delta(G-v)$, тогаш употребувајќи нова боја за v, добиваме боење на графот G со $\Delta(G-v) + 2$ бои, па очигледно $\Delta(G-v) + 2 < \Delta(G) + 1$. Значи, во двата случаи, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Равенство важи ако и само ако графот G е комплетен (секое од n-те темиња има степен n-1, т.е. секое теме е поврзано со секое друго теме, па хроматскиот број на графот е n) или регуларен граф од степен 2 со непарен број темиња (секое теме е поврзано со две други темиња, па хроматскиот број на таквиот граф е 3).

Теорема 5. (Теорема на Брукс (Brooks)) За хроматскиот број на сврзаниот граф G кој не е комплетен и кој не е непарен циклус важи $\chi(G) \leq \Delta(G)$ каде што $\Delta(G)$ е најголемиот степен на теме во графот.

Доказ. Нека G(X, U) е сврзан граф со множество темиња X={x_1, x_2, … ,x_n} кој не е комплетен и не е непарен циклус. Нека $\Delta(G)$=k. Следува дека k≥3.

Нека G не е k – регуларен. Тогаш постои теме, пример v=v_n, такво што $deg(x_n)$<k. Бидејќи G е сврзан, можеме да го претставиме како дрво со почетна точка v=v_n, а останатите точки да ги подредиме по редослед v_{n-1}, … v_1. Секое теме v_i, различно од v=v_n, по патот до v=v_n има сосед со индекс поголем од i. Значи, секое теме има најмногу k-1 соседи со помали индекси од него, па за боењето на графот G се потребни најмногу k бои.

Нека G е k – регуларен. Нека x е теме од G, а G'=G-x е подграфот од G во кој е избришано темето x. Следува дека, степенот на x во графот G' е помал од k, т.е. deg(x|G')<k. Значи, x е теме од G' со степен помал од k, па ако се искористи претходната дискусија за графот G', добиваме дека тој може да се обои со најмногу k бои. Ова важи за сите подграфови од G, па заклучуваме дека G е k – обојлив.

Нека G е 2 - сврзан. Тврдиме дека G има патека од три темиња, нека се тие подредени v_1, v_n, v_2, така што G-{v_1, v_2} е сврзан. (Нека x е било кое теме од G. Ако $k(G-x)\geq 2$, нека растојанието од v_1 до v_2 е 2. Тоа постои затоа што G е регуларен и не е комплетен. Ако $k(G-x)=1$, тогаш x има сосед во секој блок од $G-x$. Значи, G – {x, v_1, v_2} е сврзан. Бидејќи k≥3, добиваме дека G-{v_1, v_2} е сврзан и ставајќи v_n=x, го докажавме тврдењето.)
Ако сега ги подредиме темињата на G-{v_1, v_2} како v_3, v_4, … , v_n, повторно заради горната дискусија, секое теме има најмногу k-1 соседи со индекс помал од неговиот индекс. Значи, се користат најмногу k-1 боја за соседите на темето v_n (v_1 и v_2 имаат иста боја) при боењето на G-{v_1, v_2}.

Својства.

Со анализирање на својствата на видовите графови, се доаѓа до одредени заклучоци за нивните хроматски броеви:

I) Графот е 1 – хроматски (има хроматски број 1) ако е тотално несврзан (секое негово теме е изолирано, т.е. степенот на секое негово теме е 0).

II) Графот кој има барем едно ребро е најмалку 2 – хроматски.

III) Хроматскиот број на графот е помал или ендаков од бројот на неговите темиња.

IV) Ако H е подграф од графот G, важи $\chi(H) \leq \chi(G)$.

V) Комплетен граф со n темиња е има хроматски број n.

VI) Циклус со должина $n \geq 3$ има хроматски број 2 ако n е парен, а има хроматски број 3 ако n е непарен.

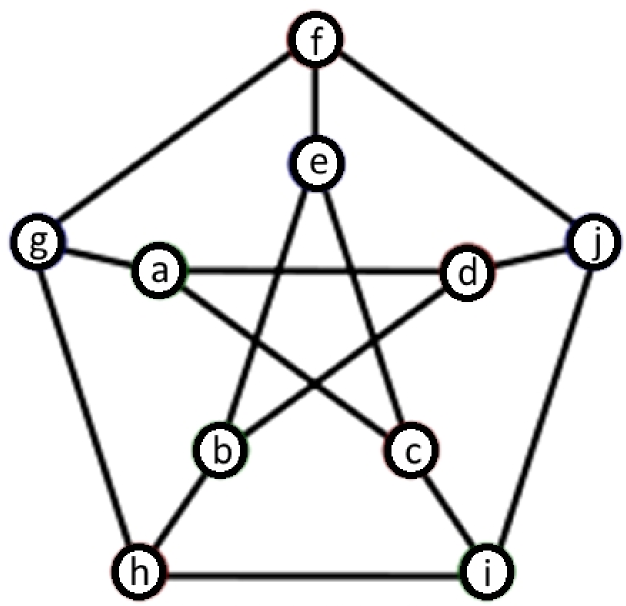
VII) Ако G е несврзан граф кој има m компоненти на сврзаност, неговиот хроматски број е еднаков со хроматскиот број на компонентата која има најголем хроматски број.

3. Употреба на теоремата на Брукс за пресметување на хроматскиот број на графови

3.1. Граф на Петерсен

Графот на Петерсен (Petersen) (ознака P) има 10 темиња и 15 ребра. Тој има за подграф циклус со непарна должина. Тој циклус има должина 5 и го означуваме C_5. Од последицата на теорема 3 и својството IV), за хроматскиот број $\chi(P)$ на графот P важи: $3 \leq \chi(C_5) \leq \chi(P)$. (*)

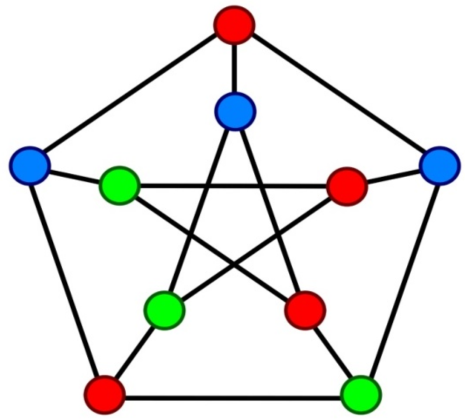
Графот P не е комплетен: на пример, $deg(a) = 3 \neq 10 - 1 = 9$. Забележуваме дека степенот на секое теме од P е 3, па $\Delta(P) = 3$ (P е 3 – регуларен граф).



Граф на Peteresen

Темиња: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j.
Ребра: ag, ad, ac, be, bd, bh, ce, ci, dj, ef, gf, gh, hi, ij, fj.

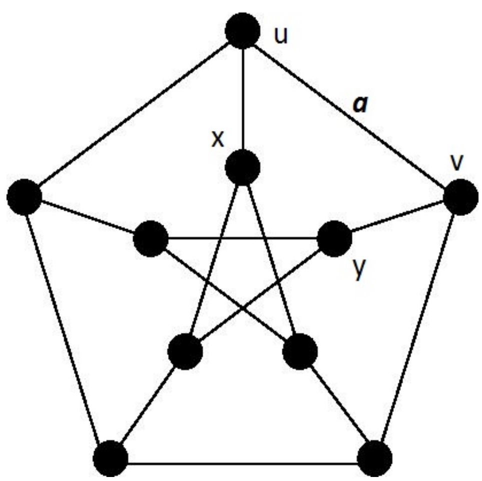
Бидејќи P не претставува циклус со непарна должина, задоволени се условите на теоремата на Brooks, т.е. $\chi(P) \leq \Delta(P) = 3$. (**)



Пример за обојување на
графот на Petersen со три бои

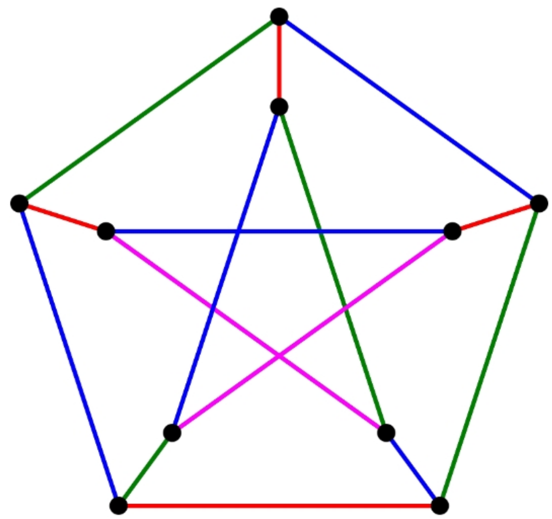
Од (*) и (**) добиваме $3 \leq \chi(P) \leq 3$, од каде следува дека $\chi(P) = 3$.

Боење на ребрата на даден граф дефинираме како придружување на бои на ребрата од графот така што две соседни ребра немаат иста боја. Притоа, соседни ребра се оние кои имаат заедничко теме. Најмалиот број на бои со кои може да се направи обојувањето на ребрата на графот го нарекуваме **хроматски индекс**.



Тврдење. Хроматскиот индекс на графот P е 4.

Доказ. Доказот ќе го спроведеме преку покажување дека хроматскиот индекс на P не е 3. Ќе го замислиме графичкиот приказ на P како состав од внатрешен 5 – круг и надворешен 5 –круг, каде што ребрата поврзуваат темиња кои се циклично разделени (несоседни) и истовремено се поврзани соодветните темиња на надворешниот и внатрешниот круг (еден вид на „биективно“ придружување). Нека претпоставиме дека хроматскиот индекс на P е 3. Бидејќи внатрешниот круг има непарна должина (должина 5), секоја од трите бои треба да се појави при боењето на неговите ребра. Нека uv е ребро од надворешниот круг со боја a (цртеж). Во правилно боење на ребрата со три бои на 3 – регуларен граф, секоја боја треба да се појави на секое теме. Бидејќи бојата a не треба да се појави на u, x, v, y, каде што x и y се соседи на u и v на внатрешниот круг, а xy не е ребро, следува дека бојата a се појавува на x и y на несоседни ребра од внатрешниот круг. Значи, бојата a треба да се употреби два пати на на внатрешниот круг. Овој заклучок го добиваме за секоја од трите бои, а бидејќи внатрешниот круг има 5 ребра, доаѓаме до контрадикција. Заклучуваме дека хроматскиот индекс на P не е 3.



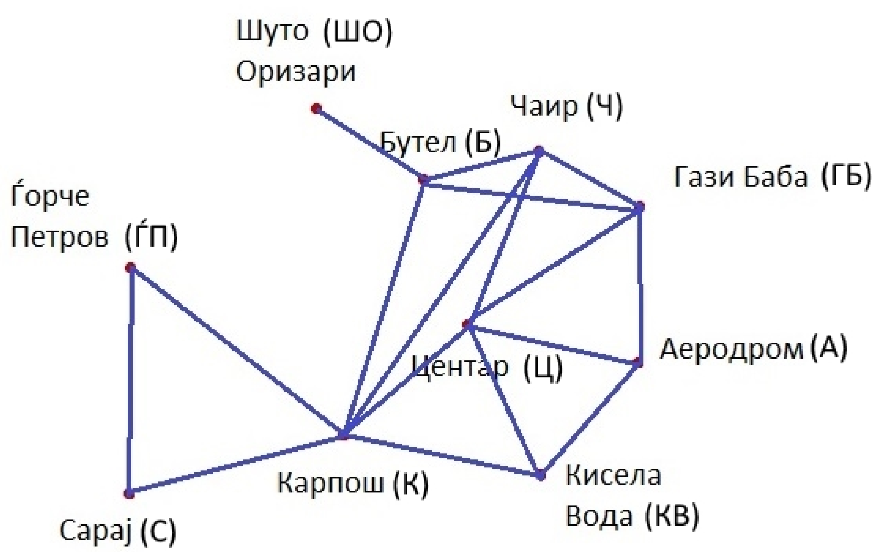
Пример за боење на ребрата
од графот на Petersen со 4 бои

3.2. Мапа на град Скопје

Во следниот пример, теоремата на Brooks е употребена за полесно наоѓање на хроматскиот број на графот чиј темиња се општините на градот Скопје, а рабови се отсечките кои поврзуваат темиња на две соседни општини.

Графот G кој е добиен на овој начин има 10 темиња и 16 рабови.

Карта на град Скопје



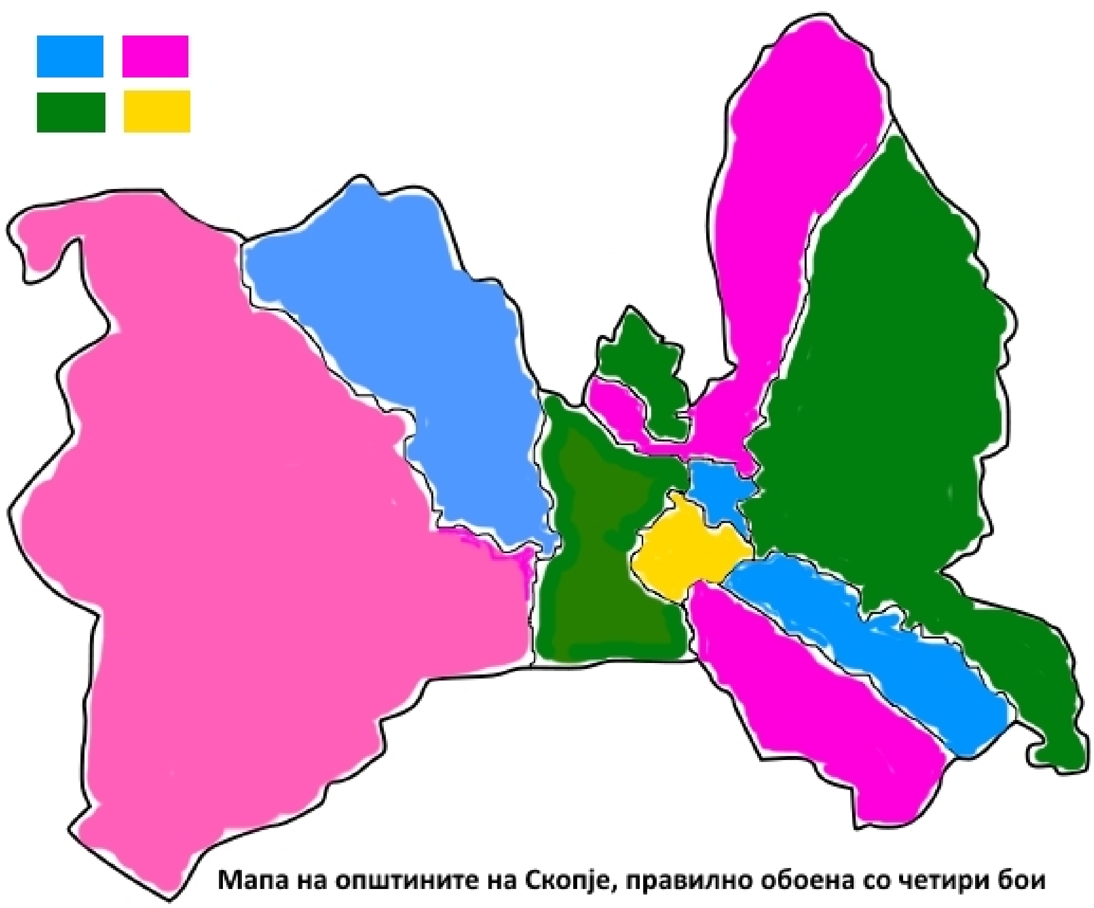
Граф со темиња - општините во Скопје, ребра - отсечки кои поврзуваат две соседни општини.

Степените на темињата се следните:

deg(ЃП)=2, deg(К)=6, deg(КВ)=3, deg(А)=3, deg(Ц)=5,

deg(ШО)=1, deg(Б)=4, deg(Ч)=4, deg(ГБ)=4, deg(С)=2.

Овој граф не е е комплетен, ниту регуларен. Од последицата на теорема 3, за хроматскиот број $\chi(G)$ на графот G важи: $3 \leq \chi(G)$. Графот G не претставува циклус со непарна должина. Темето К има најголем степен, кој е еднаков на 6. Од теоремата на Brooks, добиваме дека важи $\chi(G) \leq \Delta(G) = 6$, т.е. $\chi(G) \in \{3,4,5\}$. Со непосредна проверка, тргнувајќи од најмалата можна вредност, добиваме дека $\chi(G) = 4$.



Мапа на општините на Скопје, правилно обоена со четири бои