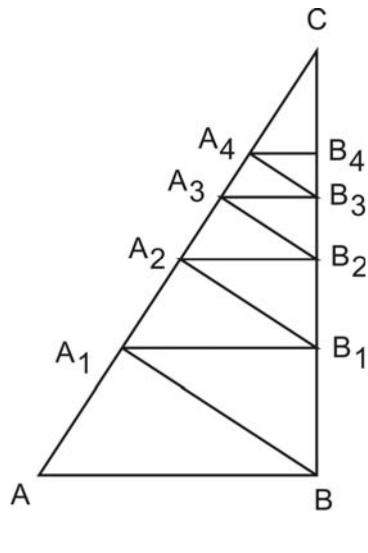
Втор семинар „Математика и примени“ 6-7 декември 2017
Институт за математика, Природно-математички факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје

ПРИМЕНА НА ПРОГРАМСКИОТ ПАКЕТ MATHEMATICA ЗА ВОВЕДУВАЊЕ НА ПОИМОТ ГРАНИЦА НА НИЗА

Ѓорѓи Маркоски
Институт за математика, ПМФ, Скопје

Според наставниот план и програма за средно образование, поимот низа се изучува во IV година. Разбирањето на поимите низа и граница на низа е од суштинско значење, пред се за оние ученици кои своето образование ќе го продолжат на техничките и природно-математичките факултети. Иако се работи за ученици кои веќе подлабоко и посуштински ја изучуваат математиката како наставен предмет, способни се да вршат апстракција и да согледуваат аналогии, не е на одмет да се направи визуелизација на поимот граница на низа. Воедно ова е успешен начин учениците кои имаат посолидни познавања на програмските јазици, да го запознаат пакетот Mathematica.

Mathematica е софтверски пакет кој се применува во математиката, инженерството, техниката и други дисциплини. Создаден е во 1988 година од Stephen Wolfram, подоцна развиен од група математичари и програмери. Овој пакет може да извршува математички операции, прави пресметки со голема точност, црта графици на функции во две и три димензии, дава можности за визуелизација на графиците за полесно испитување на нивните својства, овозможува и создавање на динамички ориентирани наставни содржини.



Постоечките учебници по математика за средно образование содржат повеќе примери за поимот граница на низа. Ќе презентираме примери за воведување на поимот граница на низа за коишто сметаме дека ќе придонесат за разбирање на поимот, а пакетот го користиме за извршување на бројните операции и цртањето кои не се главен дел од објаснувањето. На овој начин поимот е подобро визуелно објаснет, а заштедено е времето за пресметување.

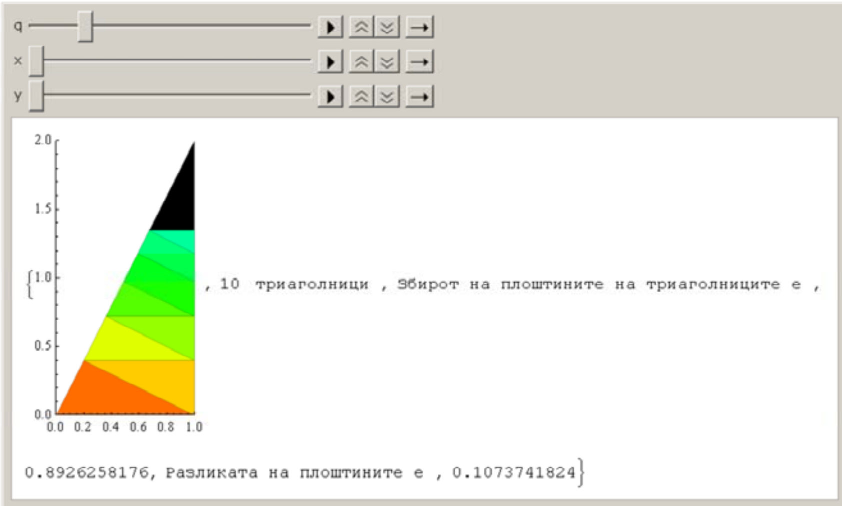
Пример 1. Даден е правоаголен триаголник ABC. Од темето на правиот агол се спушта нормала кон хипотенузата, па на тој начин се добиени два правоаголни триаголници ABA_1 и A_1BC. Потоа од точката A_1 се спушта нормала кон BC и добиени се три правоаголни триаголници. Оваа постапка продолжува како на цртежот. При создавање на програмскиот код за примерот, без ограничување на општоста, практично е да се земе триаголник со темиња $(0,0),(1,0)$ и $(0,2)$. Потоа се пресметуваат збировите од плоштините на добиените триаголници $P_{\Delta ABA_1}, P_{\Delta ABA_1}+P_{\Delta A_1BB_1}, P_{\Delta ABA_1}+P_{\Delta A_1BB_1}+P_{\Delta A_1B_1A_2},\ldots$ На овој начин е формирана низа која се стреми кон плоштината на дадениот триаголник т.е. 1.

Еве како изгледа програмскиот код од примерот.

```
za kongres-novo.nb *

f[q_, x_, y_] := (
  m[1] = {0, 0}; m[2] = {1, 0};
  For[i = 1, i ≤ q, m[i + 2] = {(2 *Last[m[i]] + 1) /5, 2 * ((2 *Last[m[i]] + 1) /5)}; i = i + 2];
  For[i = 2, i ≤ q, m[i + 2] = {1, Last[m[i + 1]]}; i = i + 2];
  For[i = 3, i ≤ q + 2, t[i - 2] = Polygon[{m[i - 1], m[i], m[i - 2]}]; i++];
  For[i = 3, i ≤ q + 2, o[i - 2] = ((First[m[i - 1]] - First[m[i - 2]]) * (Last[m[i]] - Last[m[i - 2]])) /2;
   i = i + 2];
  For[i = 4, i ≤ q + 2, o[i - 2] = ((Last[m[i]] - Last[m[i - 2]]) * (First[m[i]] - First[m[i - 1]])) /2; i = i + 2];
  a = Table[{Hue[i / (i + 13)], t[i]}, {i, 1, q}]; d = Polygon[{{0, 0}, {1, 0}, {1, 2}}];
  h = Sum[o[i], {i, 1, q}];
  Print["Збирот на плоштините на триаголниците е ", N[h, 10], "  Разликата на плоштините е ",
   N[1 - h, 10], "  или  ", Superscript[4, Last[First[FactorInteger[Numerator[1 - h]]]] /2] /
    Superscript[5, Last[First[FactorInteger[Denominator[1 - h]]]]]];
  Graphics[{d, a}, Axes → True, PlotRange → {{x, 1}, {y, 2}}])
```

Во овој дел се извршуваат пресметки на плоштините на триаголниците, нивните збирови и разликата меѓу плоштината на триаголникот ABC и збирот на плоштините на добиените триаголници. Излезот, односно визуелниот дел се прави со наредбата Animate.

```
Animate[{f[q, x, y], " триаголници " q, "Збирот на плоштините на триаголниците е ", N[h, 10]
  "Разликата на плоштините е ", N[1 - h, 10]}, {q, 1, 50, 1}, {x, 0, 1, 0.001}, {y, 0, 2, 0.001}]
```



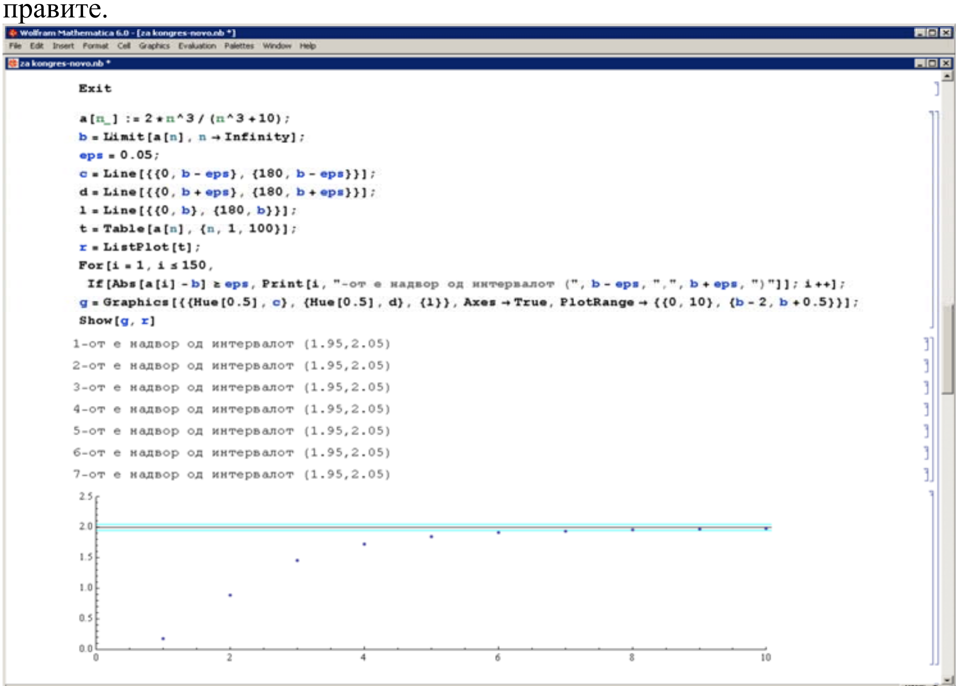
Покрај цртежот може да се прикаже и текст со кој полесно се следи бројот на нацртани триаголници и добиените разлика од збирот на нивните плоштини и плоштината на почетниот триаголник. Со променливата q, корисникот го избира бројот на триаголници, а со лизгачите x и y го подобрува видното поле.

Со мала промена на програмскиот код може да се добие различен излез. На пример, со променливата l, која зависи од q, x и y, се овозможува внесување на бројот на триголници и параметрите за видното поле, а се прикажуваат и членовите од добиената низа.

```
Wolfram Mathematica 6.0 - [za kongres-novo.nb *]
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
za kongres-novo.nb *

Exit

l[q_, x_, y_] := ((*q=Input["внеси го бројот на триаголниците"],
   x и y се интервалите на кои се црта ;*)
   m[1] = {0, 0}; m[2] = {1, 0};
   For[i = 1, i ≤ q, m[i + 2] = {(2 *Last[m[i]] + 1) / 5, 2 * ((2 *Last[m[i]] + 1) / 5)}; i = i + 2];
   For[i = 2, i ≤ q, m[i + 2] = {1, Last[m[i + 1]]}; i = i + 2];
   For[i = 3, i ≤ q + 2, t[i - 2] = Polygon[{m[i - 1], m[i], m[i - 2]}]; i ++];
   For[i = 3, i ≤ q + 2, o[i - 2] = ((First[m[i - 1]] - First[m[i - 2]]) * (Last[m[i]] - Last[m[i - 2]])) / 2;
    i = i + 2];
   For[i = 4, i ≤ q + 2, o[i - 2] = ((Last[m[i]] - Last[m[i - 2]]) * (First[m[i]] - First[m[i - 1]])) / 2; i = i + 2];
   a = Table[{Hue[i / (i + 13)], t[i]}, {i, 1, q}]; d = Polygon[{{0, 0}, {1, 0}, {1, 2}}];
   h = Sum[o[i], {i, 1, q}];
   Print["Збирот на плоштините на триаголниците е ", N[h, 10], "  Разликата на плоштините е ",
    N[1 - h, 10], "  или  ", Superscript[4, Last[First[FactorInteger[Numerator[1 - h]]]] / 2] /
     Superscript[5, Last[First[FactorInteger[Denominator[1 - h]]]]]];
   Print["низата од разлики е: ", Table [o[i] // N, {i, 1, q}]];
   Graphics[{d, a}, Axes → True, PlotRange → {{x, 1}, {y, 2}}])

l[20, 0.5, 1.5]
```

Дефинирањето на поимот граница на низа преку „$\varepsilon - n_0$“, предизвикува посериозни нејаснотии кај учениците. Тие најчесто ја меморираат постапката без подлабоко да навлезат во нејзината суштина. Дури има и такви кои ќе бидат способни да ја искажуваат дефиницијата без грешка и да го одредуваат n_0, но не се во состојба да го објаснат поимот граница на низа. Затоа сметаме дека следниот пример ќе придонесе за избегнување на нејаснотиите.

Пример 2. Внесена е низа $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3+10}$ и дадено $\varepsilon = 0,05$. На координатен систем се внесуваат паровите (n, a_n) за $n = 1,2,3,\ldots$. Нацртани се правите $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$. Програмата проверува кои точки од низата се наоѓаат меѓу правите $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$. Се прикажуваат само членовите од низата кои не лежат меѓу правите $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$ (во овој случај такви се седум точки). Потоа програмата престанува, што значи дека бараното n_0 е осум. Целата ситуација се прикажува графички. Програмскиот код дозволува промена на низата и вредноста на ε. Треба да се внимава низата a_n да биде монотона, затоа што извршувањето на програмата ќе прекине после првото појавување на пар кој лежи меѓу правите.

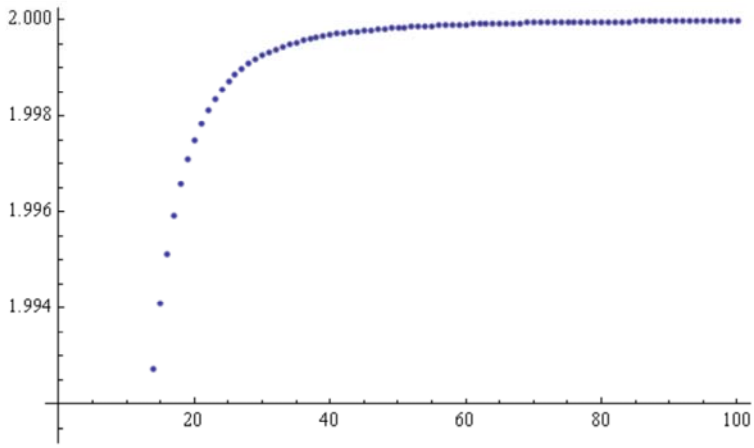


Добро е наставникот да избере различни вредности за ε, со што кај учениците ќе се создаде претстава за врската меѓу ε и n_0.

Овој програмски код може да се промени по избор на наставникот за да се презентираат и објаснат повеќе поими поврзани со низи.

При објаснувањето на поимот граница на низа добро е да се претстават повеќе членови на низата, со што воедно ќе се објасни и врската со поимот точка на натрупување на низа.

```
a[n_] := 2*n^3/(n^3+10);
b = Limit[a[n], n → Infinity];
eps = 0.05;
    t = Table[a[n], {n, 1, 100}];
Print[ListPlot[t]]
```




```
a[n_] := 2*n^3/(n^3+10);
b = Limit[a[n], n → Infinity];
    t = Table[{a[n], 0}, {n, 1, 100}];
ListPlot[t, PlotStyle → Directive[PointSize[0.02], Orange], Axes → {True, False},
 PlotRange → {{0, 2.8}, {-0.5, 0.5}}]
```

Честопати учениците ги поистоветуваат поимите граница на низа и точка на натрупување на низата. Затоа корисно е после овие примери да се внесе низа која има повеќе точки на натрупување.

```
In[23]:= a[n_] := (-1)^n*n^3/(n^3+10);
         t = Table[a[n], {n, 1, 15}];      Print[ListPlot[t]]
```