Парадокси: Кога вистината е лага, а лагата е вистина

После долго испрашување наставникот се нашол во дилема која оценка да му ја напише на ученикот бидејќи тој на моменти одговарил за 5, а на моменти за 4. Затоа го прашал ученикот: „Ако погодиш која оценка ќе ти ја напишам, ќе добиеш 5, а ако не погодиш ќе имаш 4“. Ученикот рекол: „Кога наставниците се двоумат меѓу две оценки, тогаш најчесто се одлучуваат за полошата оценка. Тоа значи дека вие ќе ми напишете 4“. По оваа изјава на ученикот, наставникот требало да донесе одлука, но неговата дилема станала пострашна. Зошто?

Ајде логички да расудуваме, да видиме зошто наставникот е во поголема дилема по изјавата на ученикот. Имено, ако ученикот ја погодил оценката, тогаш тој би требало да добие 5. Но, ако добие 5 тоа значи дека не ја погодил оценката, па значи треба да има 4. Ако, пак, не ја погодил оценката (рекол 4), тогаш би требало да добие 4, што значи дека ја погодил оценката, па наставникот треба да му напише 5, а не 4.

Во оваа ситуација, изјавата на ученикот *не е ниту вистинита, ниту лажна* во дадениот момент, туку нејзината вистинитост, односно невистинитост зависи од идните настани. Изјавата на ученикот е *парадокс* (грч. paradoxon што значи спротивно на мислењето).

Парадоксите ги има насекаде, во секојдневниот говор, во околината што не' опкружува, во пишаните зборови. Парадоксот го препознаваме во реченицата исчкртана на училишната клупа која гласи: „*Не шкртај по клупи!*“ Во реченицата напишана на штотуку отворената интернет страница, на која освен таа реченица нема ништо друго и гласи: „*Ако страницата не ви се отвара, кликнете тука.*“

Georg Cantor (1845-1918)

Некои од парадоксите оставиле таков впечаток што засекогаш се запишани во историјата. Позната е Сократовата изјава: „*Јас знам дека ништо не знам.*“ Потоа, реченицата на Бернард Шо: “*Единственото златно правило е дека нема златни правила*“. Логичките парадокси се карактеристични по тоа што, од која претпоставка и да се тргне се доаѓа до контрадикција. Многу филозофи верувале дека постоењето на парадоксите покажува дека светот во својата суштина е контрадикторен, па затоа никакво решение не може да се понуди за нив. Меѓутоа, многу парадокси имаат решение, на пример парадоксот на Галилеј, дека постојат исто толку природни броеви колку што има полни квадрати, е решен по создавањето на Канторовата теорија на множествата.

1. Со решавање на парадоксите во математиката до раѓање на нови теории

Најголемите три кризи во математиката се поврзани со решавање на парадокси. Токму нивното разрешување довело до појавување на нови и важни теории.

Околу VI век п.н.е. е настаната првата криза, со откривањето дека страната на квадратот не може да се изрази преку неговата дијагонала со помош на дотогаш познатите броеви. Тоа довело до појавувањето на *ирационалните броеви* (ако а е страна на квадратот, тогаш неговата дијагонала d изразена преку страната е $d=a\sqrt{2}$).

Втората криза е поврзана со појавувањето на *бескрајно малите величини.* Имено, математичарите од XVII и XVIII век се судриле со проблемот како е можно да постојат величини кои се земаат дека се нула, а тие се цело време различни од нула (бројот 1/n, каде што n е многу голем природен број, се зема дека е приближно еднаков на нула, но за секој природен број n, бројот $1/n\neq 0$). Овој парадокс го решил Коши со создавањето на *теоријата на граничните вредности (лимесите).*

Засега последна, третата криза во математиката (XIX и XX век) довела до појавување на *Канторовата теорија на множества*. Кризата настанала при обид да се реши ***Расловиот парадокс***, познат и како ***парадоксот на берберот***, кој гласи:

Во едно село во кое има само еден бербер постои правило според кое берберот ги бричи сите оние кои не се бричат сами и не бричи никој друг. Кој го бричи берберот?

Да претпоставиме дека берберот се бричи сам. Тогаш тој е еден од оние кои се бричат сами, но берберот ги бричи само оние селани кои не се бричат сами, што е контрадикција со направената претпоставка. Ако, пак, претпоставиме дека берберот не се бричи сам, тогаш тој е во онаа група која ги бричи берберот, па пак се доаѓа до контрадикција. Но, ако го означиме со М множеството од сите села во кои има само еден бербер и кој бричи според наведеното правило, тогаш решението на овој парадокс е $M=\emptyset$ (празно множество, односно такви села не постојат).

Може да заклучиме дека, како што подоцна изјавил Расел, *благодарение на стремежот да се решат парадоксите, математиката станува пологична, а логиката поматематичка. Парадоксите не го рушат авторитетот на математиката како непогрешлива наука, туку напротив, доведуваат до нејзино збогатување со нови поими и теории...*

2. Не се што изгледа како парадокс навистина е парадокс

Не сé што изгледа како парадокс во математиката е навистина парадокс и доведува до појавување на некоја нова теорија. Некогаш тоа е резултат на недоволно оформено математичко знаење, расеаност или едноставно забава.

Познатата изрека на Епиминид, поет од VI век п.н.е, кој бил жител на островот Крит и кој изјавил: „*Сите критјани лажат*“, долго време се сметала за парадокс, затоа што се размислувало вака: Ако Епиминид ја зборува вистината, тогаш тој треба да лаже затоа што е критјанин, па заклучуваме дека Епиминид лаже. Ако пак Епиминид лаже, тогаш сите критјани ја зборуваат вистината, односно и тој ја зборува вистината. Така излегува дека изјавата на Епиминид не е ниту вистинита, ниту лажна.

Меѓутоа грешката во горното расудување е при правење на негацијата на Епиминидовата изјава. Имено, логичката негација на *Сите критјани лажат* не е *Сите критјани ја зборуваат вистината*, туку *Постојат критјани кои ја зборуваат вистината*. Така, парадокс нема, а изјавата на Епиминид е лажна, тој лаже, но постојат критјани кои ја зборуваат вистината.

Еве уште еден пример како неправилното математичко расудување може да „доведе“ до парадокс. На часот по математика, наставникот за да го провери стекнатото знаење на учениците вели: „*Ученици, сега ќе ви докажам дека 1=2.*

Нека x и y се ненулти броеви, такви што

$$x = y.$$

Ако го помножиме ова равенство со y се добива

$$xy = y^2.$$

Ако одземеме x2 од двете страни добиваме

$$xy - x^2 = y^2 - x^2,$$

односно

$$x(y - x) = (y - x)(y + x).$$

Ако го поделиме последното равенство со $y - x$ добиваме

$$x = y + x.$$

Бидејќи $x = y$, со замена во последното равенство се добива

$$x = 2x.$$

Со делење на последното равенство со x добиваме

1 = 2.“

Така, наставникот дошол до парадокс, имено еднаш 1 ≠ 2, а друг пат 1 = 2. Но, доколку внимателно се следат чекорите на добивање на новите равенства, би требало да се воочи дека грешката е во делењето со изразот y - x, кој е нула заради условот на задачата (условот x = y), а со нула не се дели!

Обидете се самите да откриете која е причината за појава на „парадоксот“ во следните две расудувања со помош на равенства:

$$\begin{aligned}
x &= (\pi+3)/2\\
2x &= \pi+3\\
2x(\pi-3) &= (\pi+3)(\pi-3)\\
2\pi x-6x &= \pi^2-9\\
9-6x &= \pi^2-2\pi x\\
9-6x+x^2 &= \pi^2-2\pi x+x^2\\
(3-x)^2 &= (\pi-x)^2\\
3-x &= \pi-x\\
\pi &= 3
\end{aligned}$$

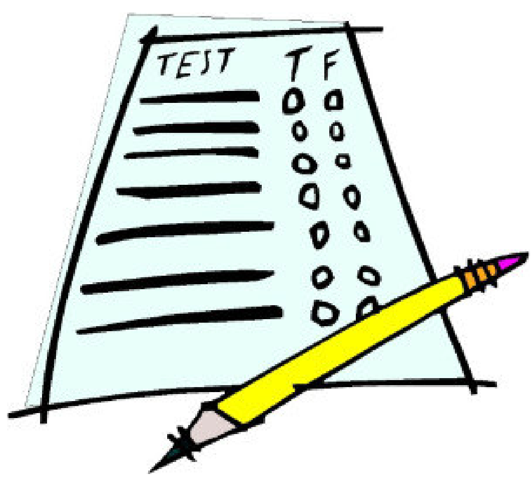
Или тука:

$$\begin{aligned}
i^{\frac{5}{2}} &= i^{\frac{5}{2}}\\
i^{\frac{1}{2}5} &= i^{5\frac{1}{2}}\\
(\sqrt{i})^5 &= \sqrt{i^5}\\
(\sqrt{i})^2(\sqrt{i})^2(\sqrt{i}) &= \sqrt{i^2 i^2 i}\\
i^2(\sqrt{i}) &= \sqrt{(-1)^2 i}\\
-\sqrt{i} &= \sqrt{i}\\
-1 &= 1
\end{aligned}$$

3. Мета-парадокси

Многу од парадоксите во математиката имаат богата содржина и се носители на сериозни математички идеи, но исто така имаат и едукативна вредност, при нивното решавање се усвојуваат основните концепти на елементарното логичко размислување. Одличен пример за тоа е ***Парадоксот на професорот за изненадниот тест***:

Во понеделник наутро професорот им рекол на своите ученици: „Ќе ви дадам изненаден тест оваа недела. Може да биде денес, утре, во среда, во четврток или најдоцна во петок. Утрото кога ќе биде тестот, кога ќе влезете во училница нема да знаете дека тој ден ќе имаме тест.“ Учениците почнале да расудуваат: „Јасно е дека тестот нема да биде во петок. Бидејќи ако тестот не се одржи во четврток, ќе знаеме дека тестот ќе биде во петок, па така нема да биде изненаден тест. Од слични причини, тестот не може да биде ниту во четврток, среда и вторник. Останува понеделник. Ако заклучиме дека тестот ќе биде во понеделник, тогаш нема да биде изненаден.“ Па, учениците сигурни во своето расудување, заклучиле дека нема воопшто да има тест таа недела, затоа што професорот не може да ја исполни својата изјава. Токму во тој момент професорот рекол: „Сега ќе ви го дадам тестот!“ Учениците биле многу изненадени. Каде учениците направиле грешка при расудувањето?



Парадоксот на професорот за изненадниот тест на прв поглед изгледа толку едноставен и безначаен што дури и не заслужува некое големо внимание. Од друга страна, голем број на математички и филозофски истражувања се инспирирани токму од него, така што дел од од овие истражувања водат и кон познатите теореми за некомлетност на Гедел, и други логички парадокси. Вакви спротивставени гледишта на разбирање на еден парадокс се својствни за *мета-парадоксите*.

При решавањето на мета-парадоксите и парадоксите воопшто, најнапред треба да се дефинира точно *кој е парадоксалниот аргумент (изјава)*. Потоа, следува *наоѓање на грешка во аргументот*. Понекогаш, при спроведување на првиот чекор, веднаш се доаѓа до грешките, но најчесто е потребно да се лоцираат лошите претпоставки, лошото размислување или грешките во самите логички структури.

Еве едно логичко решение на Парадоксот на професорот за изненадниот тест: Изненадниот тест може да се случи секој ден дури и во петок. Еве зошто. Да претпоставиме дека е петок наутро и сѐ уште не се случил тестот. Во што ќе верувам тогаш? Ако му поверував на професорот во понеделникот, дали сѐ уште ќе му верувам во петок наутро ако сѐ уште не сум имал тест? Не знам како е можно тоа. Јасно е дека ќе верувам дека ќе имам тест денес, во петок, но не верувам дека ќе биде изненаден тест. Па според тоа како да му верувам на професорот? Ако се сомневам во точноста на изјавата на професорот не знам во што да верувам. Сѐ може да се случи па дури и да се изненадам од тестот во петок. Всушност, професорот кажал 2 работи:

1) Ќе имате тест во текот на оваа недела.
2) Нема да знаете тоа утро кога ќе се случи тестот, дека тоа е тој ден.

Правилно е овие две изјави да се одвојат. Можно е професорот да зборува вистина во првата изјава, а да лаже за втората. Во петок наутро сигурно ќе знам дека професорот лаже за втората од нив. Така верувам во неговата прва изјава. Меѓутоа ако првата изјава е лажна, тогаш нема да знам дали ќе имам тест денес или, пак, нема, што значи дека втората изјава на професорот е точна. Значи, втората изјава на професорот зависи од тоа дали јас верувам или не во неговата прва изјава. Односно, единствен начин професорот да е во право е ако јас се сомневам во него. Ако се сомневам тогаш тој е во право, а ако му верувам тој тогаш лаже!

Многу математичари рекле дека вистинското задоволство не е во решението на задачата туку во нејзиното решавање. Решавањето на парадоксите го привлекува вниманието на луѓето од сите возрасти и профили. Од една страна, решавањето на парадоксите често пати е основа за развој на многу математички области, па дури и за појавување на нови математички теории. Но, од друга страна, со решавањето на парадоксите се развива конструктивното и логичкото размислување, па затоа не треба да се пропушти секоја прилика ваквите задачи да се најдат на „математичкото мени" за секоја возраст.

Извори:

[1] К. Тренчевски, Р. Малчески, Д. Димовски, Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994

[2] В. Девиде, Увод во математичката логика, Математички институт со нумерички центар при Универзитетот Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1973

[3] Е. Сендова, Математика + логика, Математика плюс ООД, София, 1998/2 (23-27)

[4] Ј. Маркоска, Парадокси, Сигма, Скопје, 73, 2006/2007, (46-48)

[5] Timothy Y. Chow, The Surprise Examination or Unexpected Hanging Paradox, Amer. Math. Monthly 105 (1998), 41-51, http://www-math.mit.edu/~tchow/unexpected.pdf

[6] V. Stojanović, Matematiskop 3, Nauka, Beograd, 1988

[7] И. Трајковска, Парадокси, Сигма, Скопје, 24/1, 2003/2004, (1-8)

[8] J. V. Grabiner, Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus, The American Mathematical Monthly, vol. 91, 1983, pp. 185-194, https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Grabiner185-194.pdf

[9] Shira Kritchman and Ran Raz, The Surprise Examination Paradox and the Second Incompleteness Theorem, Notices of the AMS (2010), Volume 57, Number 11, pp.1454-1458, http://www.ams.org/notices/201011/rtx101101454p.pdf

Автори:

Јасмина Маркоска, СУГС Георги Димитров, Скопје

Ирена Стојковска, Институт за математика, Природно математички факултет, Скопје

Објавено на ПОИМ:

28 декември 2014